

Tensões & deformações

Tutorial SectionPro — Secções hexagonal, quadrada oca & viga U sob cargas ELS e ELU segundo três códigos normativos (EC2, NBR-6118, BAEL 91)

BridgeKernel · 2026

Introdução

Dados os esforços impostos (N, M_y, M_z), o SectionPro resolve iterativamente o estado de deformação ($\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z$) e extrai tensões, deformações, forças internas e um coeficiente de segurança (FS).

Três secções são analisadas — **hexagonal maciça** (EC2), **quadrada oca** (NBR-6118) e **viga U** (BAEL 91) — no ELS (linear) e ELU (não linear), com casos OK e KO.

Resultados calculados

O SectionPro reporta três categorias de resultados para cada caso de carga:

Tensões & deform.

σ_c — Tensão extr. betão
 $\sigma_{s, \min}, \sigma_{s, \max}$ — Tensões do aço
 ε_c — Deform. extr. betão
 $\varepsilon_{s, \min}, \varepsilon_{s, \max}$ — Deform. do aço
FS — Coeficiente de segurança
Verificação — OK / KO

Forças internas

N_c — Resultante de compressão
 N_t — Resultante de tração
 (x_C, y_C) — Centróide de compressão
 (x_T, y_T) — Centróide de tração
 z — Braço de alavanca interno

Convergência

N_{iter} — Iterações
Tol — Tolerância de convergência
 $N_{\text{int}}, M_{z, \text{int}}, M_{y, \text{int}}$ — Forças internas
 $\varepsilon_0, \kappa_x, \kappa_y$ — Estado de deformação

Cenários de teste

Cada secção é analisada no ELS (linear-elástico) e ELU (parábola-retângulo para betão, bilinear para aço), com resistência à tração nula. Incluem-se casos de flexão uniaxial e biaxial, com verificações OK e KO.

Secção	ELS (linear)	ELU (não linear)	Biaxial?	Norma
Hexagonal	OK	KO	Sim (ELU)	EC2

Secção	ELS (linear)	ELU (não linear)	Biaxial?	Norma
Quadrada oca	OK	OK	Sim	NBR-6118
Viga U	KO	OK	Sim (ELU)	BAEL 91

Secção hexagonal maciça

Dados de entrada

Betão

- Secção hexagonal
- Largura $B = 2,00$ m
- Espessura mínima $h_1 = 0,60$ m
- Espessura máxima $h_2 = 1,00$ m

Armadura

- Espaçamento uniforme 150 mm
- 30 varões
- Diâmetro 25 mm
- Recobrimento 50 mm
- 1 camada

Leis de material (EC2)

- Betão C30/37: $f_{ck} = 30$ MPa
- Aço B500B: $f_{yk} = 500$ MPa

Figura 1: Secção hexagonal — geometria e armadura.

ELS — Flexão composta ($N + M_z$)

Cargas impostas: $N = 500$ kN, $M_z = 1000$ kN · m, $M_y = 0$

Visualization of stresses and strains

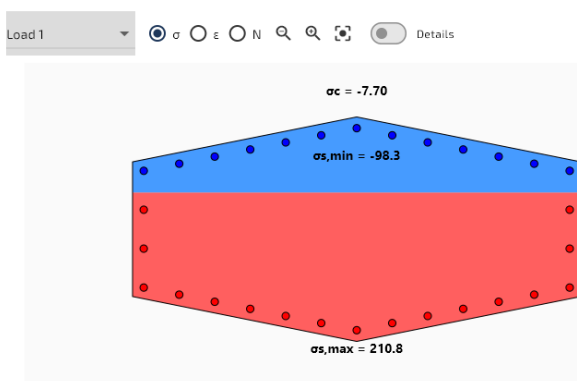


Figura 2: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

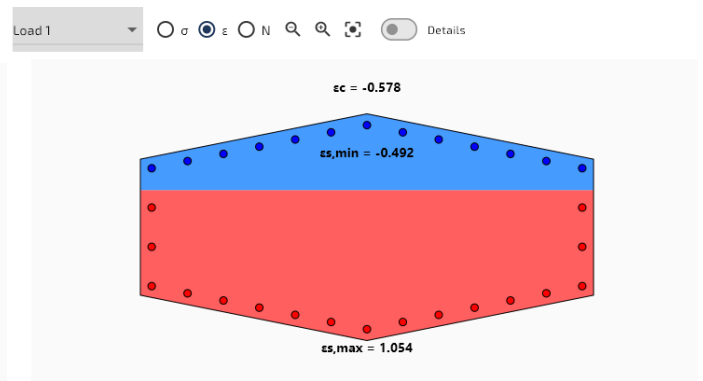


Figura 3: Distribuição de deformações.

Tensões & deformações

σ_c	-7,70 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-98,33 MPa

Forças internas

N_c	1731,2 kN
N_t	-1231,2 kN

Convergência

N_{iter}	4
Tol	$3,91 \times 10^{-9}$

$\sigma_{s, \max}$	210,77 MPa	x_C	0,000 m	N_{int}	500,0 kN
ε_c	-0,578‰	y_C	0,345 m	$M_{z, \text{int}}$	1000,0 kN · m
$\varepsilon_{s, \min}$	-0,492‰	x_T	0,000 m	$M_{y, \text{int}}$	0,0 kN · m
$\varepsilon_{s, \max}$	1,054‰	y_T	-0,327 m	ε_0	$0,281 \times 10^{-3}$
FS	0,527	z	0,672 m	κ_x	$-1,717 \times 10^{-3}$
Verificação	OK			κ_y	$0,000 \times 10^{-3}$

ELU — Flexão biaxial ($N + M_y + M_z$)

Cargas impostas: $N = 2000$ kN, $M_z = 3000$ kN · m, $M_y = 1800$ kN · m

Visualization of stresses and strains

Load 2 σ ε N M κ ε_0 κ_x κ_y Details

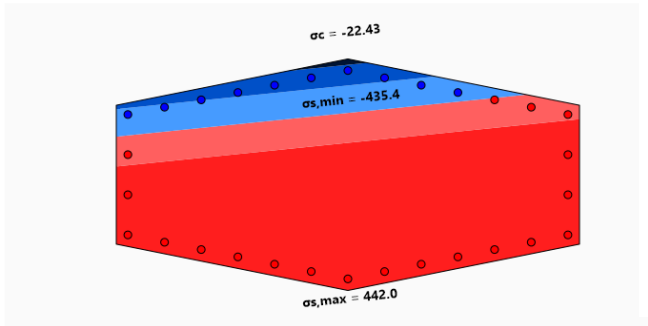


Figura 4: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

Load 2 σ ε N M κ ε_0 κ_x κ_y Details

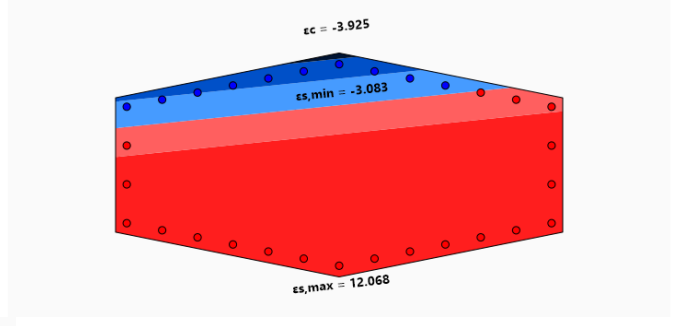


Figura 5: Distribuição de deformações.

Tensões & deformações

σ_c	-22,43 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-435,44 MPa
$\sigma_{s, \max}$	441,98 MPa
ε_c	-3,925‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-3,083‰
$\varepsilon_{s, \max}$	12,068‰
FS	1,121

Verificação

KO

Forças internas

N_c	5871,9 kN
N_t	-3871,9 kN
x_C	-0,252 m
y_C	0,356 m
x_T	0,083 m
y_T	-0,235 m
z	0,679 m

Convergência

N_{iter}	8
Tol	$6,84 \times 10^{-9}$
N_{int}	2000,0 kN
$M_{z, \text{int}}$	3000,0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	1800,0 kN · m
ε_0	$4,492 \times 10^{-3}$
κ_x	$-16,834 \times 10^{-3}$
κ_y	$-1,721 \times 10^{-3}$

Quando $FS > 1$, as cargas impostas excedem a capacidade da secção. Aqui, o betão está esmagado ($\varepsilon_c = 3,925\text{‰} > \varepsilon_{cu} = 3,5\text{‰}$). Para além da rotura, um módulo secante estende a lei de material para atingir um equilíbrio fictício pós-rotura, quantificando a ultrapassagem ($FS = 1,121$).

Secção quadrada oca

Dados de entrada

Betão

- Secção quadrada oca
- Lado exterior $a = 2,0$ m
- Espessura da parede $t = 0,30$ m

Armadura

- Espaçamento uniforme 150 mm
- 64 varões
- Diâmetro 20 mm
- Recobrimento 40 mm
- 1 camada por face (interior + exterior)

Leis de material (NBR-6118)

- Betão C30: $f_{ck} = 30$ MPa
- Aço: $f_{yk} = 500$ MPa

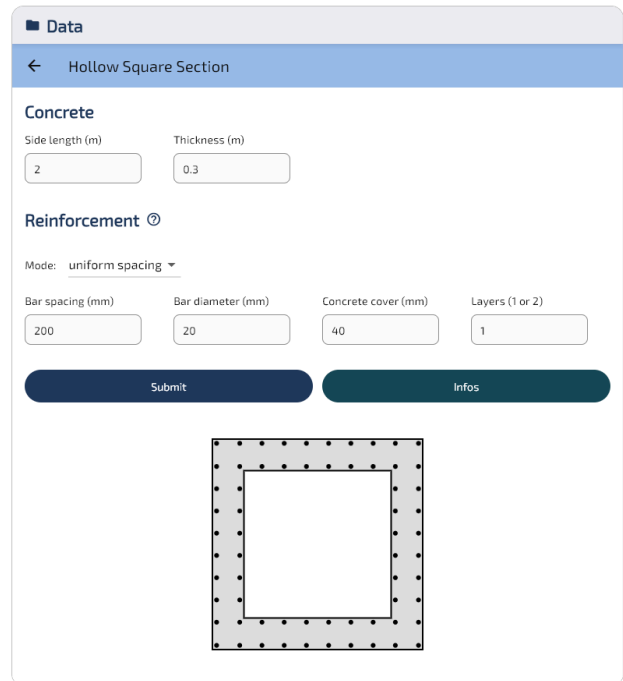


Figura 6: Secção quadrada oca — geometria e armadura.

ELS — Flexão biaxial ($N + M_y + M_z$)

Cargas impostas: $N = -400$ kN, $M_z = 900$ kN · m, $M_y = 400$ kN · m

Visualization of stresses and strains

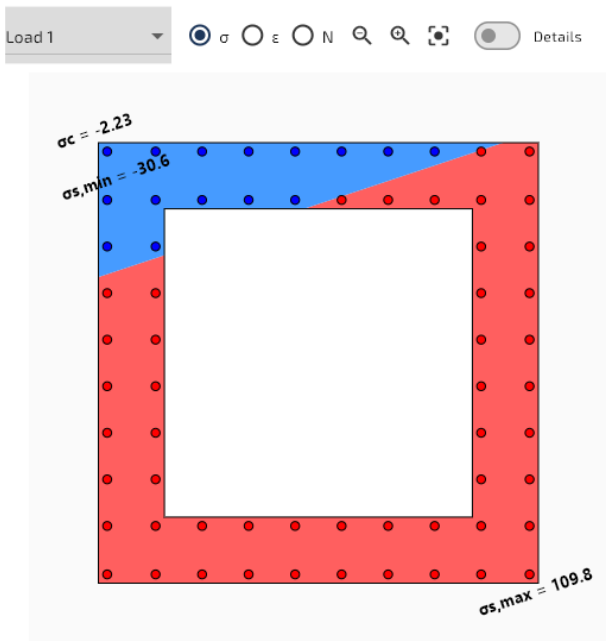


Figura 7: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

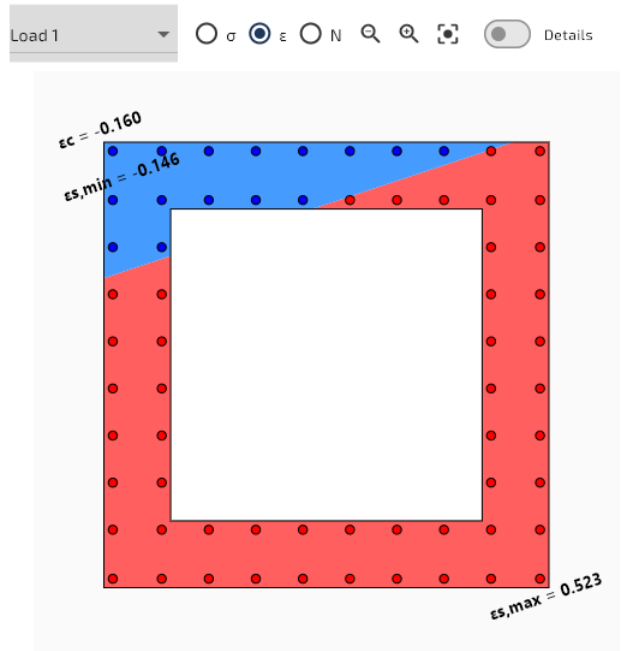


Figura 8: Distribuição de deformações.

Tensões & deformações

σ_c	-2,23 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-30,57 MPa
$\sigma_{s, \max}$	109,79 MPa
ε_c	-0,160‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-0,146‰
$\varepsilon_{s, \max}$	0,523‰
FS	0,274
Verificação	OK

Forças internas

N_c	458,9 kN
N_t	-858,9 kN
x_C	-0,541 m
y_C	0,859 m
x_T	0,177 m
y_T	-0,589 m
z	1,616 m

Convergência

N_{iter}	4
Tol	$7,72 \times 10^{-10}$
N_{int}	-400,0 kN
$M_{z, \text{int}}$	900,0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	400,0 kN · m
ε_0	$0,189 \times 10^{-3}$
κ_x	$-0,261 \times 10^{-3}$
κ_y	$-0,087 \times 10^{-3}$

ELU — Flexão biaxial ($N + M_y + M_z$)

Cargas impostas: $N = 0$ kN, $M_z = 6000$ kN · m, $M_y = 6000$ kN · m

Visualization of stresses and strains

Load 2 σ ε N Q M Details

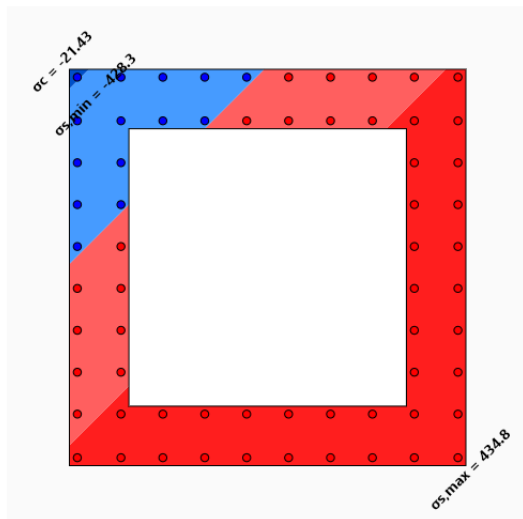


Figura 9: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

Load 2 σ ε N Q M Details

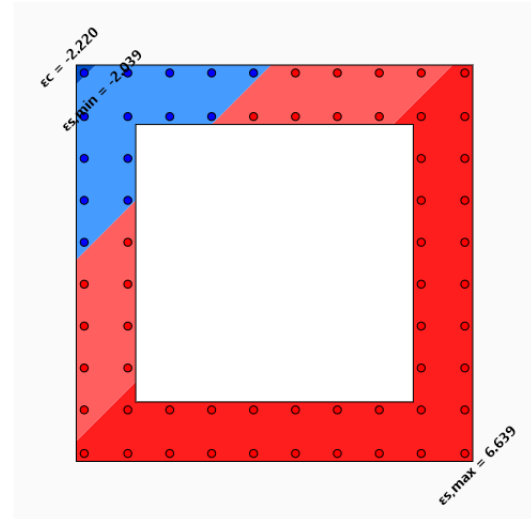


Figura 10: Distribuição de deformações.

Tensões & deformações

σ_c	-21,43 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-428,28 MPa
$\sigma_{s, \max}$	434,78 MPa
ε_c	-2,220‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-2,039‰
$\varepsilon_{s, \max}$	6,639‰
FS	0,634
Verificação	OK

Forças internas

N_c	5800,7 kN
N_t	-1293,2 kN
x_C	-0,751 m
y_C	0,751 m
x_T	-0,085 m
y_T	0,265 m
z	0,824 m

Convergência

N_{iter}	9
Tol	$2,35 \times 10^{-7}$
N_{int}	0,0 kN
$M_{z, \text{int}}$	6000,0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	6000,0 kN · m
ε_0	$2,300 \times 10^{-3}$
κ_x	$-2,260 \times 10^{-3}$
κ_y	$-2,260 \times 10^{-3}$

Secção personalizada — Viga U

Dados de entrada

O contorno externo é definido por pontos XY e a armadura por uma tabela (x, y, φ) .

Betão

- Viga U com almas inclinadas
- Altura total $h = 1,20$ m

Armadura

- Espaçamento uniforme 150 mm
- Laje inferior: 11 varões, diâmetro 20 mm
- Almas: 49 varões, diâmetro 12 mm
- 2 camadas por alma

Leis de material (BAEL 91)

- Betão: $f_{c28} = 30$ MPa, $\theta = 0,85$
- Aço fe500: $f_e = 500$ MPa

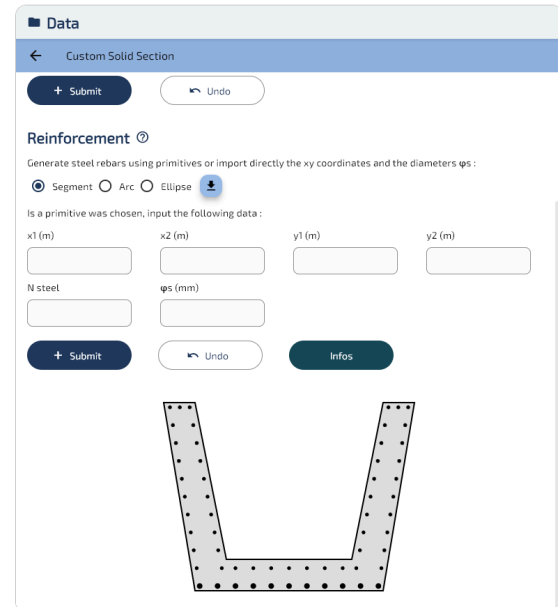


Figura 11: Viga U — geometria e armadura.

ELS — Flexão pura (M_z)

Cargas impostas: $N = 0$ kN, $M_z = 1500$ kN · m, $M_y = 0$

Visualization of stresses and strains

Load 1 σ ε N Q Q Details

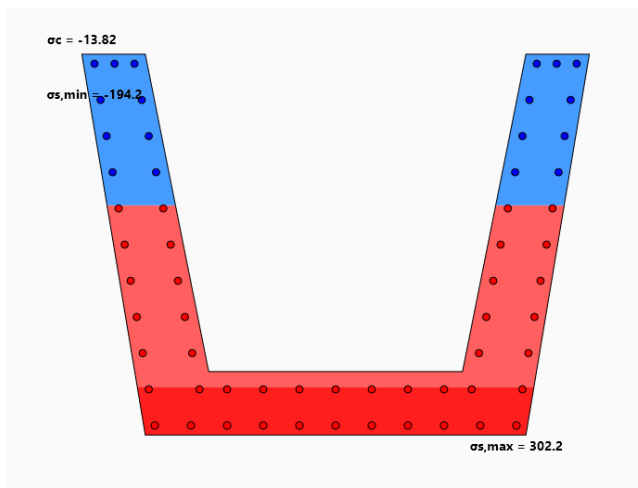


Figura 12: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

Load 1 σ ε N Q Q Details

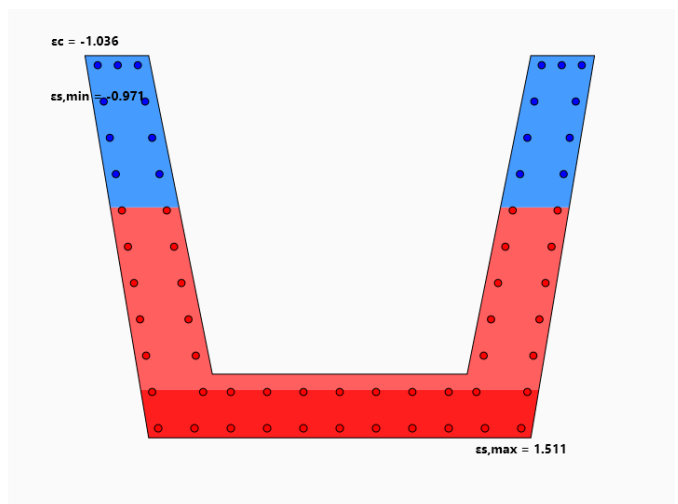


Figura 13: Distribuição de deformações.

Tensões & deformações

σ_c	-13,82 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-194,19 MPa
$\sigma_{s, \max}$	302,23 MPa
ε_c	-1,036‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-0,971‰
$\varepsilon_{s, \max}$	1,511‰
FS	1,209
Verificação	KO

Forças internas

N_c	1593,2 kN
N_t	-1593,2 kN
x_C	0,000 m
y_C	0,571 m
x_T	0,000 m
y_T	-0,371 m
z	0,942 m

Convergência

N_{iter}	4
Tol	$2,26 \times 10^{-13}$
N_{int}	0,0 kN
$M_{z, \text{int}}$	1500,0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	0,0 kN · m
ε_0	$0,543 \times 10^{-3}$
κ_x	$-2,177 \times 10^{-3}$
κ_y	$0,000 \times 10^{-3}$

No ELS, a verificação é KO: $\sigma_{s, \max} = 302,2$ MPa excede a tensão admissível BAEL $\bar{\sigma}_s = 250,0$ MPa (fendilhação prejudicial, $\eta = 1,60$), resultando em FS = 1,209.

ELU — Flexão biaxial ($M_y + M_z$)

Cargas impostas: $N = 0$ kN, $M_z = 2000$ kN · m, $M_y = 500$ kN · m

Visualization of stresses and strains

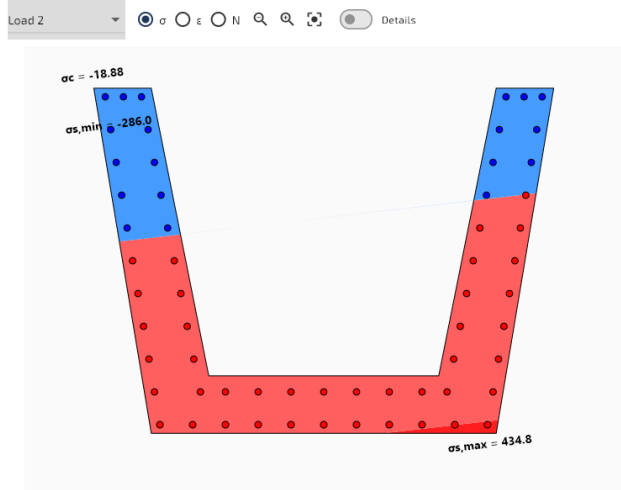


Figura 14: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

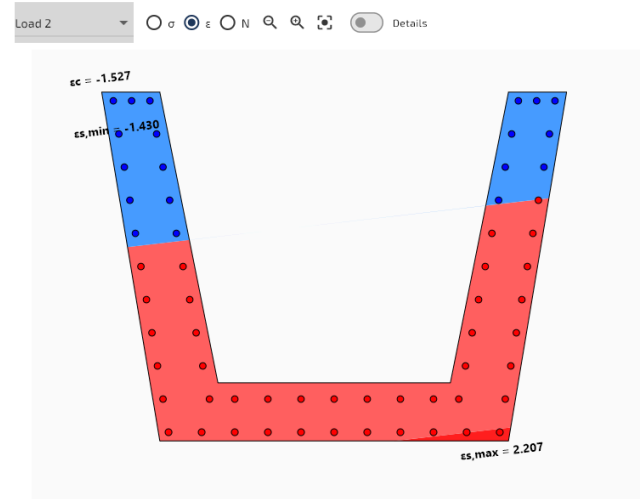


Figura 15: Distribuição de deformações.

Tensões & deformações

σ_c	-18,88 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-286,01 MPa
$\sigma_{s, \max}$	434,78 MPa
ε_c	-1,527‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-1,430‰
$\varepsilon_{s, \max}$	2,207‰
FS	0,436
Verificação	OK

Forças internas

N_c	2158,2 kN
N_t	-2158,2 kN
x_C	-0,192 m
y_C	0,562 m
x_T	0,039 m
y_T	-0,365 m
z	0,955 m

Convergência

N_{iter}	4
Tol	$5,50 \times 10^{-9}$
N_{int}	0,0 kN
$M_{z, \text{int}}$	2000,0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	500,0 kN · m
ε_0	$0,772 \times 10^{-3}$
κ_x	$-2,811 \times 10^{-3}$
κ_y	$-0,325 \times 10^{-3}$

Validação dos resultados

Verificação do equilíbrio interno

As cargas impostas (N, M_y, M_z) são os dados de entrada. O SectionPro resolve iterativamente ($\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z$) e integra as tensões para obter ($N_{\text{int}}, M_{y,\text{int}}, M_{z,\text{int}}$), que devem corresponder às cargas impostas:

$$N_{\text{int}} \approx N \quad M_{y,\text{int}} \approx M_y \quad M_{z,\text{int}} \approx M_z$$

Secção	Carga	N (kN)	N_{int} (kN)	M_z (kN·m)	$M_{z,\text{int}}$ (kN·m)	Δ
Hexagonal	ELS	500,0	500,0	1000,0	1000,0	0,00 %
	ELU	2000,0	2000,0	3000,0	3000,0	0,00 %
Quadr. oca	ELS	-400,0	-400,0	900,0	900,0	0,00 %
	ELU	0,0	0,0	6000,0	6000,0	0,00 %
Viga U	ELS	0,0	0,0	1500,0	1500,0	0,00 %
	ELU	0,0	0,0	2000,0	2000,0	0,00 %

O equilíbrio interno é satisfeito com precisão de máquina para os seis casos de carga.

Benchmark de desempenho — 100.000 casos de carga

100.000 casos de carga (ELS/ELU, uniaxial/biaxial, OK/KO) são executados em cada secção. Tempos medidos excluem overhead de interface. Convergência obtida para os 300.000 casos.

Métrica	Hexagonal	Quadrada oca	Viga U
Casos de carga	100.000	100.000	100.000
Tempo de cálculo	0,173 s	0,304 s	0,260 s
Taxa	578.000 casos/s	329.000 casos/s	385.000 casos/s

Taxas de 329.000 a 578.000 casos/s, tornando o SectionPro prático para envoltentes de carga de elementos finitos.

Exportação

Resultados exportáveis em **PDF**, **texto** e **Excel** (.xlsx), incluindo tensões, forças internas, convergência e figuras.

STRESS AND STRAIN VERIFICATION RESULTS $\sigma - \epsilon$

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-03-04 13:27

Load case #1 is the most unfavorable

Stresses and strains $\sigma - \epsilon$

σ and ϵ are the stresses and strains of concrete and steel (indices c and s). The safety factor reflects the ratio between maximum strain and limit strain. SF=1 therefore indicates non-verification of the material.

Param	Unit	#1	#2
σ_c	MPa	-13.82	-18.88
$\sigma_{s,min}$	MPa	-194.19	-286.01
$\sigma_{s,max}$	MPa	302.23	434.78
ϵ_c	‰	-1.036	-1.527
$\epsilon_{s,min}$	‰	-0.971	-1.430
$\epsilon_{s,max}$	‰	1.511	2.207
SF	-	1.209	0.436
Check	-	Ko	Ok

Internal forces

N_c and N_t are the compression and tension forces resulting from the integration of stresses over the section. The application coordinates of these forces are given by xy . The lever arm z is the distance between these forces.

Param	Unit	#1	#2
N_c	kN	1593.2	2158.2
N_t	kN	-1593.2	-2158.2
x_C	m	0.000	-0.192
y_C	m	0.571	0.561
x_T	m	0.000	0.039
y_T	m	-0.371	-0.365
z	m	0.942	0.955

Convergence

Given below are the number of iterations necessary for convergence of the solution algorithm, the tolerance achieved, the internal forces (N, M_z, M_y) and the deformation state of the section ($\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$).

Param	Unit	#1	#2
N_{iter}	-	4	4
Tol	-	9.99e-9	9.99e-9
N_{int}	kN	0.0	0.0
M_z,int	kN-m	1500.0	2000.0
M_y,int	kN-m	-0.0	500.00
ϵ_o	‰	0.543	0.772
ϵ_{xx}	‰	-2.177	-2.811
ϵ_{yy}	‰	-0.000	-0.325

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

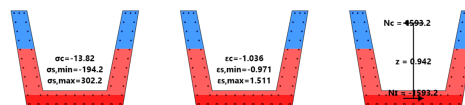
Figura 16: Exportação PDF — página 1: tabelas de resultados.

STRESS AND STRAIN VERIFICATION RESULTS $\sigma - \epsilon$

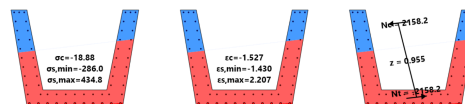
GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-03-04 13:27

Given below are figures representing graphically the previous tabular results.

Load case n°1 - Safety Factor = 1.209 (σ, ϵ and N_c, N_t)



Load case n°2 - Safety Factor = 0.436 (σ, ϵ and N_c, N_t)



GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

Figura 17: Exportação PDF — página 2: figuras.

Conclusão

A análise identifica corretamente os casos que excedem a capacidade, com equilíbrio satisfeito com precisão de máquina. Três normas (EC2, NBR-6118, BAEL 91), três geometrias, leis lineares e não lineares, flexão uniaxial e biaxial.

Secção	Caso de carga	Norma	Verificação	Equilíbrio Δ
Hexagonal	ELS (linear)	EC2	OK	0,00 %
	ELU (não linear)	EC2	KO	0,00 %
Quadr. oca	ELS (linear)	NBR-6118	OK	0,00 %
	ELU (não linear)	NBR-6118	OK	0,00 %
Viga U	ELS (linear)	BAEL 91	KO	0,00 %
	ELU (não linear)	BAEL 91	OK	0,00 %

O benchmark mostra 329.000 a 578.000 casos/s (0,17–0,30 s por secção), com convergência para os 300.000 casos, adequado para verificações de envolventes de elementos finitos.