

Tensões & deformações

Tutorial SectionPro — Seções hexagonal, quadrada vazada & viga U sob cargas ELS e ELU segundo três códigos normativos (EC2, NBR-6118, BAEL 91)

BridgeKernel · 2026

Introdução

Dados esforços impostos (N, M_y, M_z), o SectionPro determina iterativamente o estado de deformação ($\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z$) que satisfaz o equilíbrio interno. Do estado convergido resultam tensões, deformações, forças internas e um coeficiente de segurança (FS).

São analisadas três seções e três normas: **hexagonal** (EC2), **quadrada vazada** (NBR-6118) e **viga U** (BAEL 91), cada uma em ELS (linear) e ELU (não linear). Alguns casos passam (OK), outros falham (KO).

Resultados calculados

O SectionPro reporta três categorias de resultados para cada caso de carga:

Tensões & deform.

σ_c — Tensão extr. concreto
 $\sigma_{s, \min}, \sigma_{s, \max}$ — Tensões do aço
 ε_c — Deform. extr. concreto
 $\varepsilon_{s, \min}, \varepsilon_{s, \max}$ — Deform. do aço
FS — Coeficiente de segurança
Verificação — OK / KO

Forças internas

N_c — Resultante de compressão
 N_t — Resultante de tração
 (x_C, y_C) — Centróide de compressão
 (x_T, y_T) — Centróide de tração
 z — Braço de alavanca interno

Convergência

N_{iter} — Iterações
Tol — Tolerância de convergência
 $N_{\text{int}}, M_{z, \text{int}}, M_{y, \text{int}}$ — Forças internas
 $\varepsilon_0, \kappa_x, \kappa_y$ — Estado de deformação

Cenários de teste

Cada seção é analisada em ELS (linear-elástico) e ELU (não linear: parábola-retângulo para concreto, bilinear para aço), sempre com seção fissurada. Os casos combinam flexão uniaxial ($N + M_z$) e biaxial ($N + M_y + M_z$), com resultados OK e KO.

$\sigma_{s, \min}$	-98,33 MPa	N_t	-1231,2 kN	Tol	$3,91 \times 10^{-9}$
$\sigma_{s, \max}$	210,77 MPa	x_C	0,000 m	N_{int}	500,0 kN
ε_c	-0,578‰	y_C	0,345 m	$M_{z, \text{int}}$	1000,0 kN · m
$\varepsilon_{s, \min}$	-0,492‰	x_T	0,000 m	$M_{y, \text{int}}$	0,0 kN · m
$\varepsilon_{s, \max}$	1,054‰	y_T	-0,327 m	ε_0	$0,281 \times 10^{-3}$
FS	0,527	z	0,672 m	κ_x	$-1,717 \times 10^{-3}$
Verificação	OK			κ_y	$0,000 \times 10^{-3}$

ELU — Flexão biaxial ($N + M_y + M_z$)

Cargas impostas: $N = 2000$ kN, $M_z = 3000$ kN · m, $M_y = 1800$ kN · m

Visualization of stresses and strains

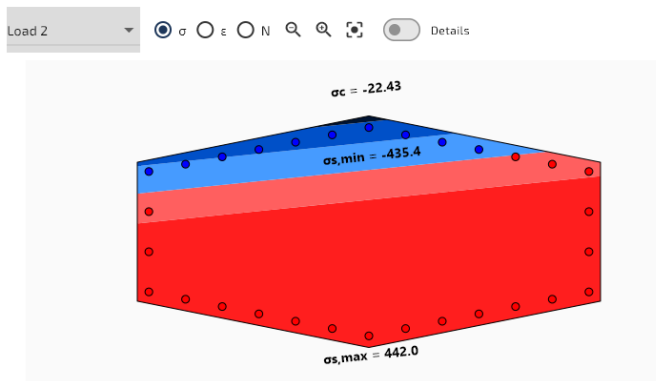


Figura 4: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

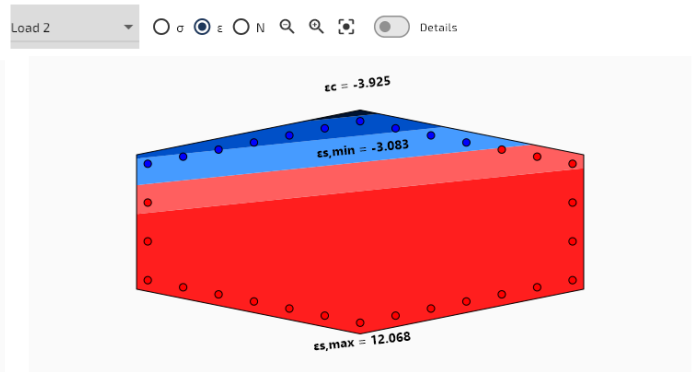


Figura 5: Distribuição de deformações.

Tensões & deformações

σ_c	-22,43 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-435,44 MPa
$\sigma_{s, \max}$	441,98 MPa
ε_c	-3,925‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-3,083‰
$\varepsilon_{s, \max}$	12,068‰
FS	1,121

Verificação

KO

Forças internas

N_c	5871,9 kN
N_t	-3871,9 kN
x_C	-0,252 m
y_C	0,356 m
x_T	0,083 m
y_T	-0,235 m
z	0,679 m

Convergência

N_{iter}	8
Tol	$6,84 \times 10^{-9}$
N_{int}	2000,0 kN
$M_{z, \text{int}}$	3000,0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	1800,0 kN · m
ε_0	$4,492 \times 10^{-3}$
κ_x	$-16,834 \times 10^{-3}$
κ_y	$-1,721 \times 10^{-3}$

FS > 1: cargas excedem a capacidade ($\varepsilon_c = 3,925\text{‰} > \varepsilon_{cu} = 3,5\text{‰}$). Um módulo secante estende a lei além da ruptura, quantificando a ultrapassagem (FS = 1,121).

Seção quadrada vazada

Dados de entrada

Concreto

- Seção quadrada vazada
- Lado externo $a = 2,0$ m
- Espessura da parede $t = 0,30$ m

Armadura

- Espaçamento uniforme 150 mm
- 64 barras de aço
- Diâmetro 20 mm
- Cobrimento 40 mm
- 1 camada por face (interna + externa)

Leis de material (NBR-6118)

- Concreto C30: $f_{ck} = 30$ MPa
- Aço: $f_{yk} = 500$ MPa

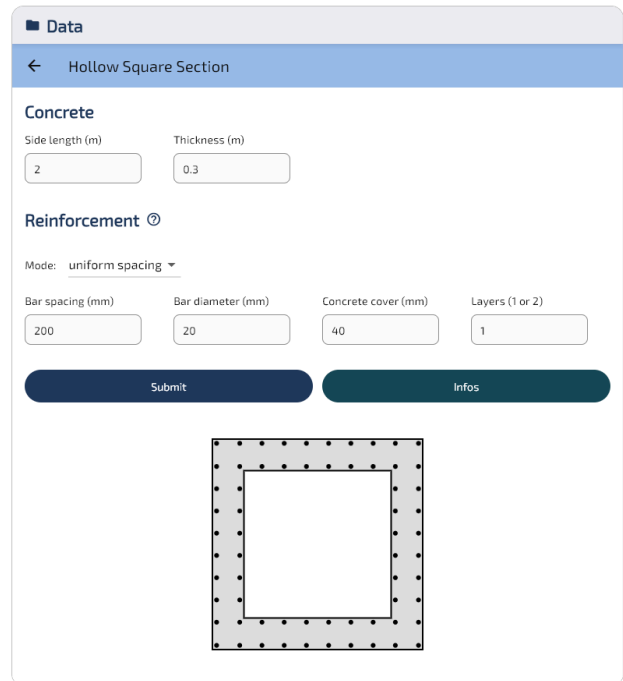


Figura 6: Seção quadrada vazada — geometria e armadura.

ELS — Flexão biaxial ($N + M_y + M_z$)

Cargas impostas: $N = -400$ kN, $M_z = 900$ kN · m, $M_y = 400$ kN · m

Visualization of stresses and strains

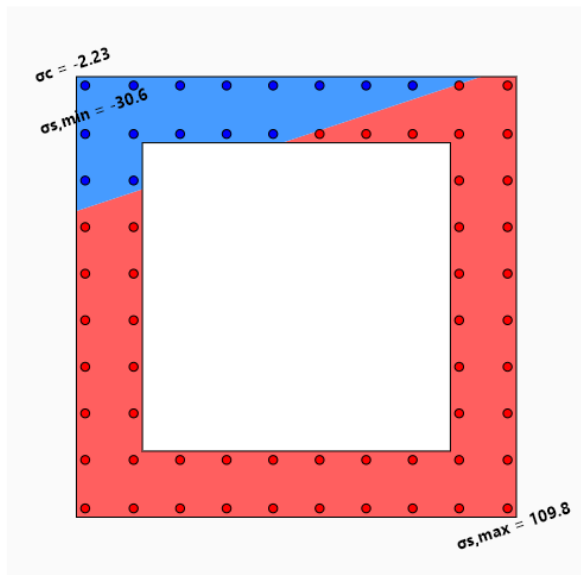


Figura 7: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

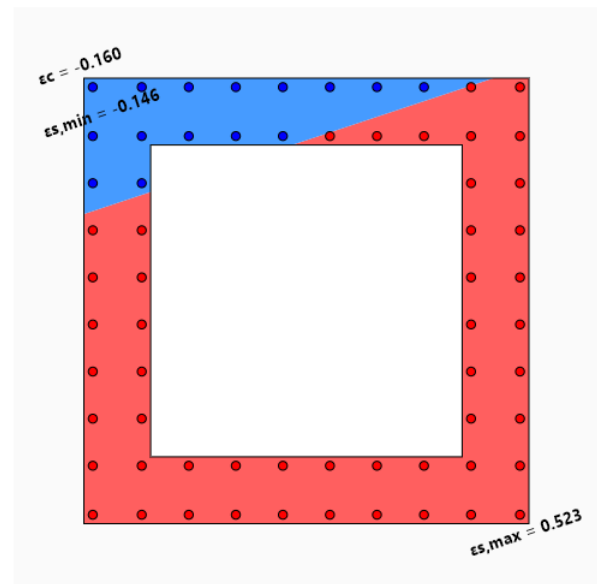


Figura 8: Distribuição de deformações.

Tensões & deformações

σ_c	-2,23 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-30,57 MPa
$\sigma_{s, \max}$	109,79 MPa
ε_c	-0,160‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-0,146‰
$\varepsilon_{s, \max}$	0,523‰
FS	0,274
Verificação	OK

Forças internas

N_c	458,9 kN
N_t	-858,9 kN
x_C	-0,541 m
y_C	0,859 m
x_T	0,177 m
y_T	-0,589 m
z	1,616 m

Convergência

N_{iter}	4
Tol	$7,72 \times 10^{-10}$
N_{int}	-400,0 kN
$M_{z, \text{int}}$	900,0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	400,0 kN · m
ε_0	$0,189 \times 10^{-3}$
κ_x	$-0,261 \times 10^{-3}$
κ_y	$-0,087 \times 10^{-3}$

ELU — Flexão biaxial ($N + M_y + M_z$)

Cargas impostas: $N = 0$ kN, $M_z = 6000$ kN · m, $M_y = 6000$ kN · m

Visualization of stresses and strains

Load 2 σ ε N Q M Details

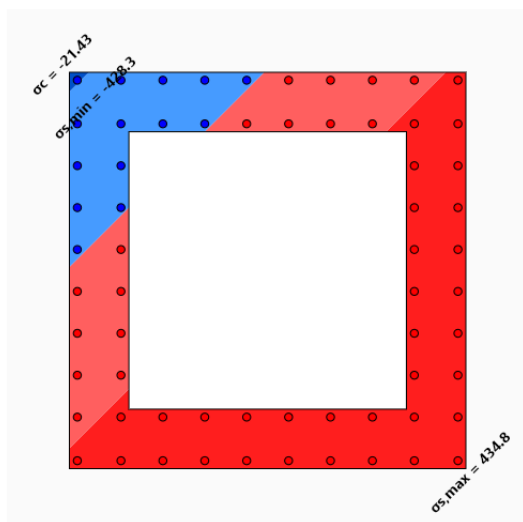


Figura 9: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

Load 2 σ ε N Q M Details

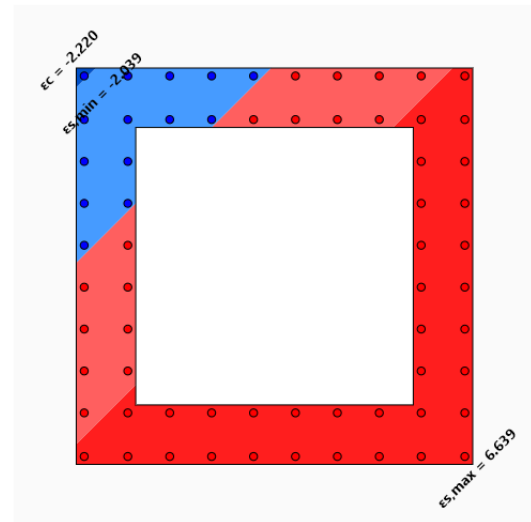


Figura 10: Distribuição de deformações.

Tensões & deformações

σ_c	-21,43 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-428,28 MPa
$\sigma_{s, \max}$	434,78 MPa
ε_c	-2,220‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-2,039‰
$\varepsilon_{s, \max}$	6,639‰
FS	0,634
Verificação	OK

Forças internas

N_c	5800,7 kN
N_t	-1293,2 kN
x_C	-0,751 m
y_C	0,751 m
x_T	-0,085 m
y_T	0,265 m
z	0,824 m

Convergência

N_{iter}	9
Tol	$2,35 \times 10^{-7}$
N_{int}	0,0 kN
$M_{z, \text{int}}$	6000,0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	6000,0 kN · m
ε_0	$2,300 \times 10^{-3}$
κ_x	$-2,260 \times 10^{-3}$
κ_y	$-2,260 \times 10^{-3}$

Seção personalizada — Viga U

Dados de entrada

Seção via **geometria personalizada**: contorno externo (pontos XY) e armadura (x, y, φ).

Concreto

- Viga U com almas inclinadas
- Altura total $h = 1,20$ m

Armadura

- Espaçamento uniforme 150 mm
- Laje inferior: 11 barras de aço, diâmetro 20 mm
- Almas: 49 barras de aço, diâmetro 12 mm
- 2 camadas por alma

Leis de material (BAEL 91)

- Concreto: $f_{c28} = 30$ MPa, $\theta = 0,85$
- Aço fe500: $f_e = 500$ MPa

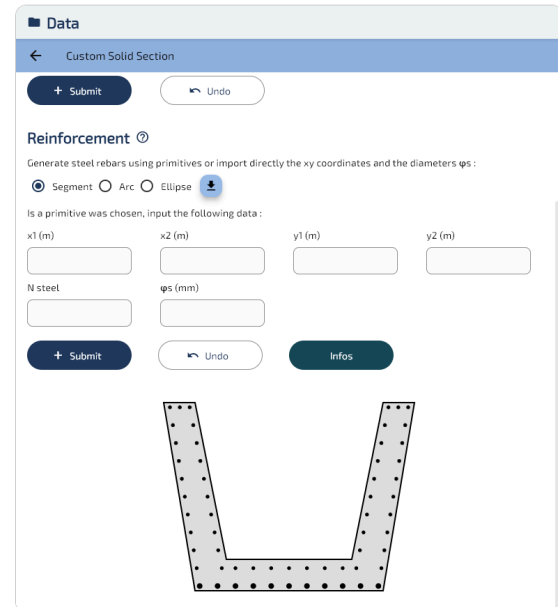


Figura 11: Viga U — geometria e armadura.

ELS — Flexão pura (M_z)

Cargas impostas: $N = 0$ kN, $M_z = 1500$ kN · m, $M_y = 0$

Visualization of stresses and strains

Load 1 σ ε N Q Q Details

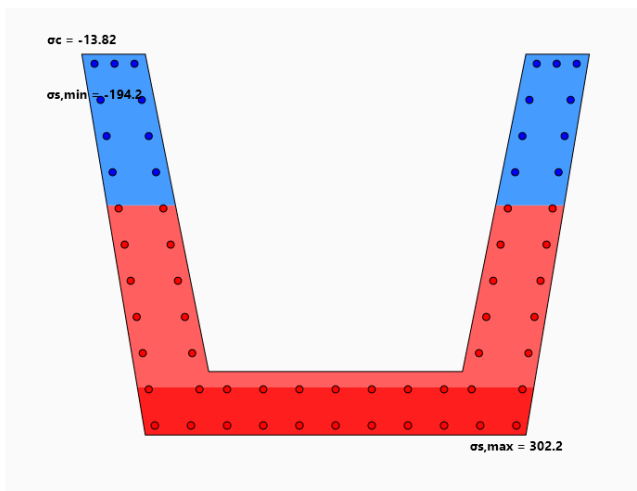


Figura 12: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

Load 1 σ ε N Q Q Details

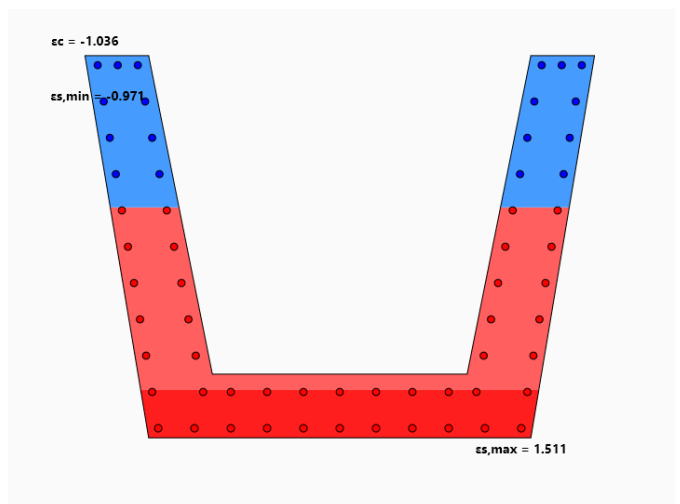


Figura 13: Distribuição de deformações.

Tensões & deformações

σ_c	-13,82 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-194,19 MPa
$\sigma_{s, \max}$	302,23 MPa
ε_c	-1,036‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-0,971‰
$\varepsilon_{s, \max}$	1,511‰
FS	1,209
Verificação	KO

Forças internas

N_c	1593,2 kN
N_t	-1593,2 kN
x_C	0,000 m
y_C	0,571 m
x_T	0,000 m
y_T	-0,371 m
z	0,942 m

Convergência

N_{iter}	4
Tol	$2,26 \times 10^{-13}$
N_{int}	0,0 kN
$M_{z, \text{int}}$	1500,0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	0,0 kN · m
ε_0	$0,543 \times 10^{-3}$
κ_x	$-2,177 \times 10^{-3}$
κ_y	$0,000 \times 10^{-3}$

ELS KO: $\sigma_{s, \max} = 302,2 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_s = 250,0 \text{ MPa}$ (BAEL, fissuração prejudicial, $\eta = 1,60$), logo FS = 1,209.

ELU — Flexão biaxial ($M_y + M_z$)

Cargas impostas: $N = 0 \text{ kN}$, $M_z = 2000 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_y = 500 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Visualization of stresses and strains

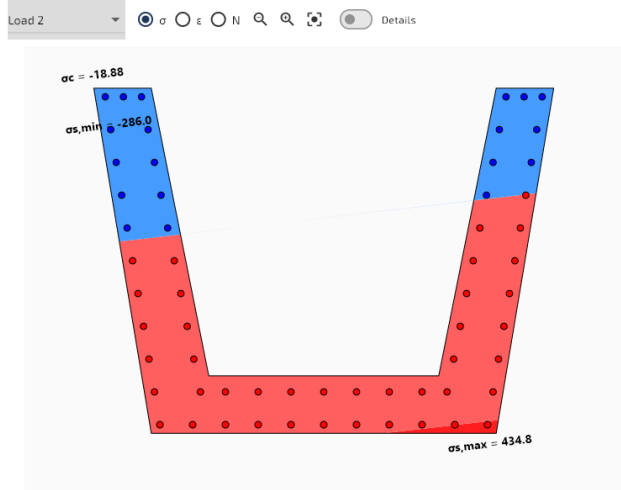


Figura 14: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

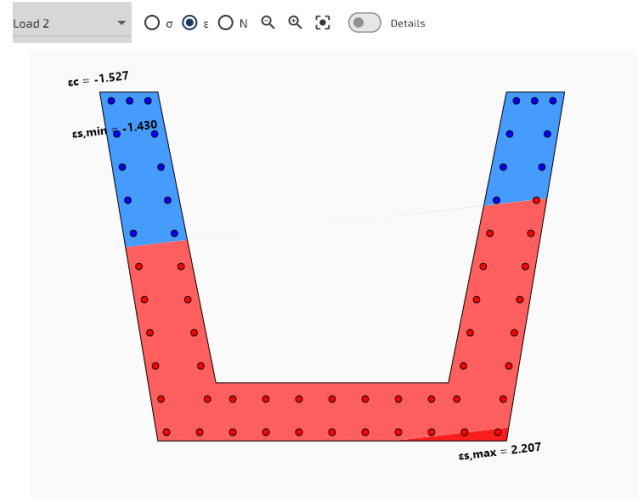


Figura 15: Distribuição de deformações.

Tensões & deformações

σ_c	-18,88 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-286,01 MPa
$\sigma_{s, \max}$	434,78 MPa
ε_c	-1,527‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-1,430‰
$\varepsilon_{s, \max}$	2,207‰
FS	0,436
Verificação	OK

Forças internas

N_c	2158,2 kN
N_t	-2158,2 kN
x_C	-0,192 m
y_C	0,562 m
x_T	0,039 m
y_T	-0,365 m
z	0,955 m

Convergência

N_{iter}	4
Tol	$5,50 \times 10^{-9}$
N_{int}	0,0 kN
$M_{z, \text{int}}$	2000,0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	500,0 kN · m
ε_0	$0,772 \times 10^{-3}$
κ_x	$-2,811 \times 10^{-3}$
κ_y	$-0,325 \times 10^{-3}$

Validação dos resultados

Verificação do equilíbrio interno

As cargas (N, M_y, M_z) são os dados de entrada. O SectionPro determina iterativamente ($\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z$) e integra as tensões para obter as forças internas ($N_{\text{int}}, M_{y,\text{int}}, M_{z,\text{int}}$). Na convergência:

$$N_{\text{int}} \approx N \quad M_{y,\text{int}} \approx M_y \quad M_{z,\text{int}} \approx M_z$$

Seção	Carga	N (kN)	N_{int} (kN)	M_z (kN·m)	$M_{z,\text{int}}$ (kN·m)	Δ
Hexagonal	ELS	500,0	500,0	1000,0	1000,0	0,00 %
	ELU	2000,0	2000,0	3000,0	3000,0	0,00 %
Quadr. vazada	ELS	-400,0	-400,0	900,0	900,0	0,00 %
	ELU	0,0	0,0	6000,0	6000,0	0,00 %
Viga U	ELS	0,0	0,0	1500,0	1500,0	0,00 %
	ELU	0,0	0,0	2000,0	2000,0	0,00 %

O equilíbrio interno é satisfeito com precisão de máquina para todos os seis casos de carga.

Benchmark de desempenho — 100.000 casos de carga

Executamos 100.000 casos em **cada uma das três seções** (ELS/ELU, uni-/biaxial, OK/KO). O benchmark mede tempo de computação puro; convergência obtida para todos os 300.000 casos.

Métrica	Hexagonal	Quadrada vazada	Viga U
Casos de carga	100.000	100.000	100.000
Tempo de cálculo	0,173 s	0,304 s	0,260 s
Taxa	578.000 casos/s	329.000 casos/s	385.000 casos/s

Todas as seções processadas em menos de 0,3 s (329k–578k casos/s), adequado para verificação sistemática de envoltórias de software de elementos finitos.

Exportação

O SectionPro exporta resultados como **PDF**, **texto** e **Excel** (.xlsx), incluindo tensões, forças, dados de convergência e figuras.

STRESS AND STRAIN VERIFICATION RESULTS $\sigma - \epsilon$

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-03-04 13:27

Load case #1 is the most unfavorable

Stresses and strains $\sigma - \epsilon$

σ and ϵ are the stresses and strains of concrete and steel (indices c and s). The safety factor reflects the ratio between maximum strain and limit strain. SF>1 therefore indicates non-verification of the material.

Param	Unit	#1	#2
σ_c	MPa	-13.82	-18.88
$\sigma_{s,min}$	MPa	-194.19	-286.01
$\sigma_{s,max}$	MPa	302.23	434.78
ϵ_c	‰	-1.036	-1.527
$\epsilon_{s,min}$	‰	-0.971	-1.430
$\epsilon_{s,max}$	‰	1.511	2.207
SF	-	1.209	0.436
Check	-	Ko	Ok

Internal forces

N_c and N_t are the compression and tension forces resulting from the integration of stresses over the section. The application coordinates of these forces are given by xy . The lever arm z is the distance between these forces.

Param	Unit	#1	#2
N_c	kN	1593.2	2158.2
N_t	kN	-1593.2	-2158.2
x_C	m	0.000	-0.192
y_C	m	0.571	0.561
x_T	m	0.000	0.039
y_T	m	-0.371	-0.365
z	m	0.942	0.955

Convergence

Given below are the number of iterations necessary for convergence of the solution algorithm, the tolerance achieved, the internal forces (N, M_z, M_y) and the deformation state of the section ($\epsilon_0, \kappa_x, \kappa_y$).

Param	Unit	#1	#2
N_{iter}	-	4	4
Tol	-	9.99e-9	9.99e-9
N_{int}	kN	0.0	0.0
M_z_{int}	kN-m	1500.0	2000.0
M_y_{int}	kN-m	-0.0	500.00
ϵ_0	‰	0.543	0.772
κ_x	‰	-2.177	-2.811
κ_y	‰	-0.000	-0.325

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

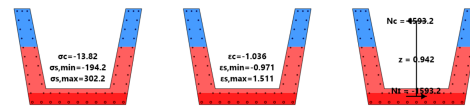
Figura 16: Exportação PDF — página 1: tabelas de resultados.

STRESS AND STRAIN VERIFICATION RESULTS $\sigma - \epsilon$

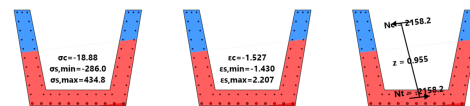
GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-03-04 13:27

Given below are figures representing graphically the previous tabular results.

Load case n°1 - Safety Factor = 1.209 (σ, ϵ and N_c, N_t)



Load case n°2 - Safety Factor = 0.436 (σ, ϵ and N_c, N_t)



GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

Figura 17: Exportação PDF — página 2: figuras.

Conclusão

A análise identifica corretamente os casos que excedem a capacidade, com equilíbrio satisfeito com precisão de máquina em todos os casos.

Seção	Caso de carga	Norma	Verificação	Equilíbrio Δ
Hexagonal	ELS (linear)	EC2	OK	0,00 %
	ELU (não linear)	EC2	KO	0,00 %
Quadr. vazada	ELS (linear)	NBR-6118	OK	0,00 %
	ELU (não linear)	NBR-6118	OK	0,00 %
Viga U	ELS (linear)	BAEL 91	KO	0,00 %
	ELU (não linear)	BAEL 91	OK	0,00 %

O benchmark (100k casos) mostra 0,17–0,30 s por seção (329k–578k casos/s), com convergência para todos os 300.000 casos.