

Curbe de rigiditate

Tutorial SectionPro: diagrame moment-curbura
si degradarea rigiditatii de incovoiere sub incarcare crescatoare

BridgeKernel · 2026

Introducere

Betonul armat nu este un material liniar: rigiditatea sa de incovoiere EI depinde de nivelul de incarcare. La incarcari reduse, materialele raman in domeniul elastic (otel) sau tangent initial (beton), deci EI este ridicat. Pe masura ce incarcarea creste, betonul intra pe ramura descendenta a legii parabola-dreptunghi iar oteul atinge palierul de curgere, provocand scaderea lui EI . Aceasta degradare conteaza pentru estimarea deplasarilor realiste, dar si in analiza structurala cand eforturile interne depind de distributia rigiditatilor: structuri static nedeterminate, analiza de ordinul doi, redistribuire.

SectionPro traseaza raspunsul complet al sectiunii fixand doua componente de forta si crescand a treia (N , M_z sau M_y) de la zero la rupere. La fiecare pas, un echilibru iterativ determina starea de deformatie specifica. Abordarea gestioneaza si incovoierea biaxiala: variind N , se observa cum se deplaseaza curba $M-\chi$, compresia rigidizand raspunsul iar tractiunea inmuindu-l. Se produc trei curbe: forta-deformatie ($M-\chi$), rigiditatea secanta EI_{sec} si rigiditatea tangenta EI_{tan} . Rigiditatea secanta (panta de la origine la punctul curent) reprezinta rigiditatea medie pe traseul de incarcare, folosita in analiza MEF iterativa. Rigiditatea tangenta (panta instantanee) da rigiditatea exacta pentru o stare de incarcare data, folosita in analiza neliniara unde matricea de rigiditate se actualizeaza la fiecare pas.

Solverul detecteaza si *evenimente de rigiditate*, adica tranzitii cheie pe legile constitutive: elasticitate-plasticitate si rupere. Pentru oteul, evenimentele pot aparea in tractiune si compresiune; pentru beton, in compresiune (palier plastic la ε_{c2} si zdrobire la ε_{cu2}). Fiecare eveniment este raportat cu participantul, pragul de deformatie, nivelul de forta si valorile EI_{sec} si EI_{tan} .

Rezultate calculate

Curbe

$M-\chi$, $N-\varepsilon_0$
 EI_{sec} , EI_{tan} vs. incarcare
 EA_{sec} , EA_{tan} vs. incarcare

Tabel de evenimente

Participant: beton / oteul
Prag critic de deformatie specifica
Fora, EI sau EA la eveniment
Curgere, palier plastic, zdrobire

Exporturi

PDF: curbe de rigiditate + tabel de evenimente
XLS / TXT: traseu complet de incarcare + evenimente

Sectiune dreptunghiulara (Eurocode 2)

Date de intrare

Beton

- Sectiune transversala dreptunghiulara plina
- Latime = 2.00 m, Inaltime = 1.00 m

Armatura

- 56 bare, spatiere uniforma 100 mm
- Diametru $\varphi = 25$ mm, acoperire 50 mm
- Procent de armare $\rho = 1.37\%$

Legi de material (EC2)

- Beton C40/50: $f_{ck} = 40$ MPa
- Otel B500B: $f_{yk} = 500$ MPa

The screenshot shows a 'Data' window for a 'Solid Rectangular Section'. Under 'Concrete', the width is 2m and height is 1m. Under 'Reinforcement', the mode is 'uniform spacing', bar spacing is 100mm, bar diameter is 25mm, concrete cover is 50mm, and there is 1 layer. A diagram at the bottom shows a rectangular cross-section with reinforcement bars.

Figura 1: Sectiune transversala dreptunghiulara.

Curba de rigiditate este calculata in incovoiere pura: componenta libera este M_z (curbura χ_z), cu $N = 0$ si $M_y = 0$ fixe. Starea limita este SLU Fundamental ($\gamma_c = 1.50$, $\gamma_s = 1.15$). Curbura variaza de la zero la rupere, iar la fiecare pas se calculeaza momentul si rigiditatea corespunzatoare.

Curba $M_z-\chi$ si rigiditatea tangenta

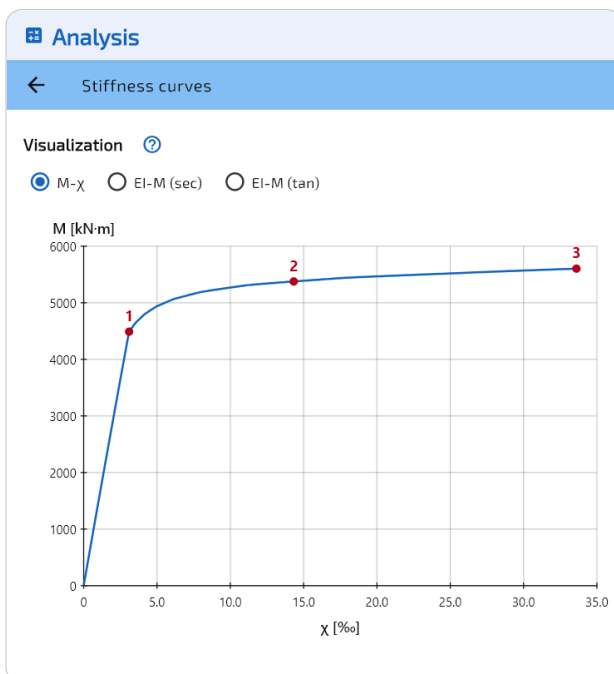


Figura 2: Diagrama moment-curbura.

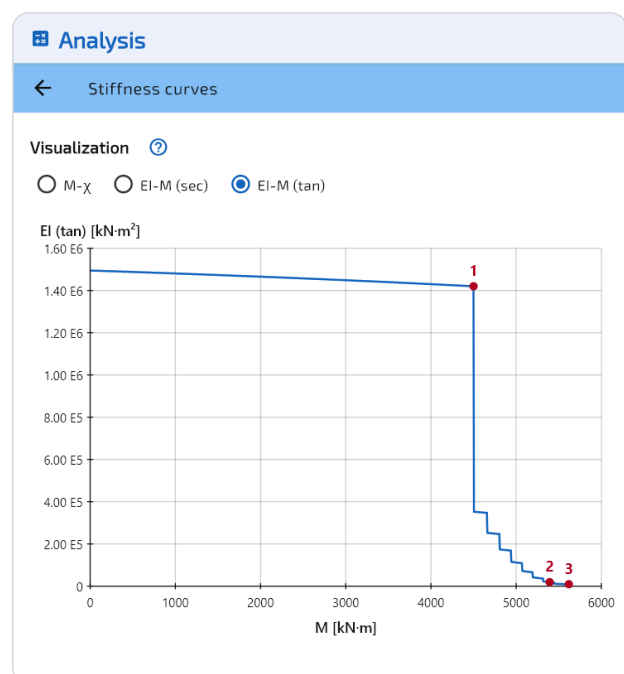


Figura 3: Rigiditate tangenta EI_{tan} .

Curba $M-\chi$ prezinta forma clasica: ramura initiala abrupta cu modulii tangenti ridicati, cot de tranzitie la evenimentul #1 (curgerea otelului) si un lung palier plastic unde curbura suplimentara produce putin moment in plus. Momentul ultim depaseste momentul de curgere cu doar 25%, dar curbura a crescut de zece ori.

Rigiditatea tangenta ramane cvasi-constanta in domeniul elastic, apoi scade brusc la evenimentul #1. Scaderea este abrupta deoarece toate barele din stratul inferior au aceeasi coordonata y si curg simultan; fiind armatura principala de incovoiere, pierderea de rigiditate e imediata (EI_{tan} impartit la 4 la acest singur eveniment). Cand barele sunt la adancimi diferite, curgerea e progresiva si curba tangenta prezinta un model in trepte. Dupa evenimentul #2, EI_{tan} scade aproape de zero, reflectand palierul plastic aproape plat de pe curba $M-\chi$.

Rigiditatea secanta EI_{sec} si rigiditatea axiala EA

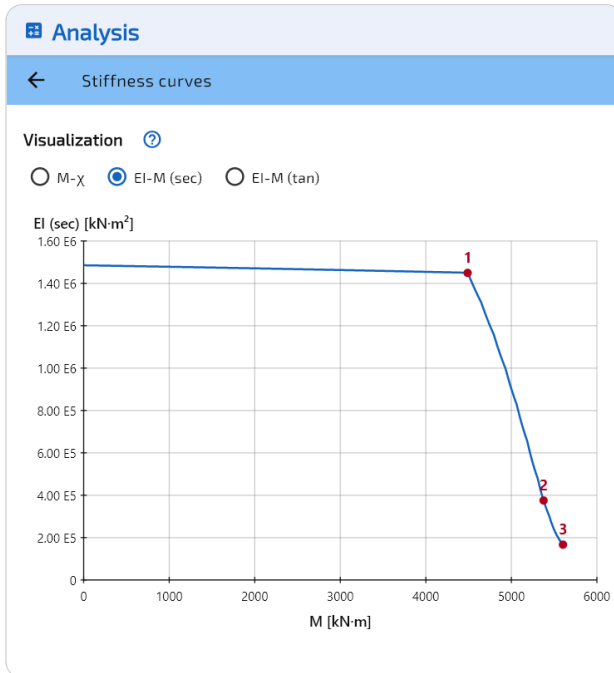


Figura 4: Rigiditate secanta EI_{sec} .

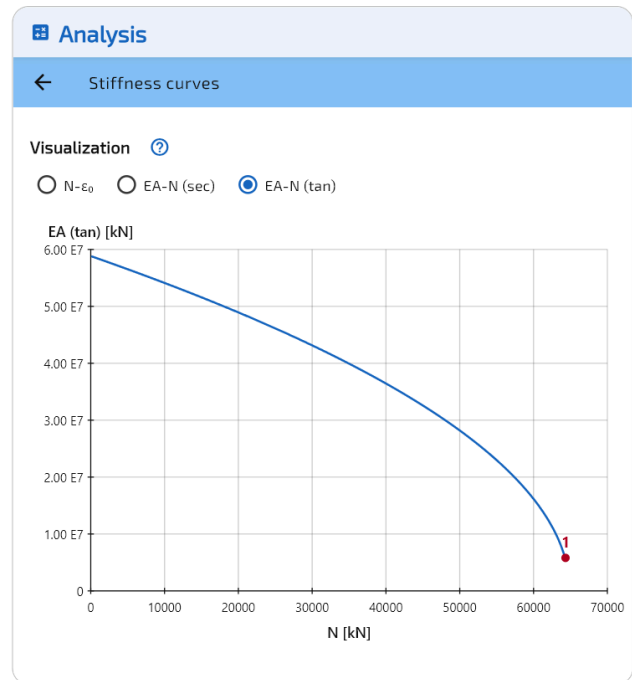


Figura 5: Rigiditate axiala EA .

Rigiditatea secanta ramane aproape constanta in domeniul elastic. Scaderea incepe la evenimentul #1 (curgerea otelului), cu doar 2% reducere. Scaderea abrupta are loc intre evenimentele #1 si #2, pe masura ce otelul curge si betonul intra pe palierul plastic. La rupere, ramane doar circa 11% din rigiditatea initiala.

Rigiditatea axiala EA urmeaza un model mai simplu: scade pe masura ce modulul tangent al legii parabola-dreptunghi scade sub deformatia de compresiune crescanda. Curba se termina cand sectiunea atinge deformatia ultima de compresiune a betonului.

Evenimente de rigiditate ($M-\chi$)

Solverul detecteaza trei evenimente pe curba $M-\chi$ pentru aceasta sectiune si stare limita:

#	Material	ϵ_c / ϵ_s (%)	χ_z (%)	M_z (kN·m)	EI_{sec} (kN·m ²)	EI_{tan} (kN·m ²)
1	Otel	2.174	3.084	4 500	1.459E6	1.420E6
2	Beton	-2.000	14.764	5 393	3.653E5	1.897E4
3	Beton	-3.500	34.576	5 618	1.625E5	9.451E3

Evenimentul #1 este curgerea otelului ($\epsilon_s = f_{yd}/E_s = 434.8/200\,000 = 2.174\%$). Evenimentul #2 marcheaza atingerea palierului plastic al betonului $\epsilon_{c2} = 2.000\%$. Evenimentul #3 este zdrobirea betonului la $\epsilon_{cu2} = 3.500\%$, terminand curba.

Sectiune oblonga tubulara (BAEL 91)

Date de intrare

Beton

- Sectiune transversala oblonga tubulara
- Latime totala = 4.00 m, Inaltime = 2.00 m
- Latime dreptunghiulara = 2.00 m, Grosime = 0.30 m

Armatura

- 108 bare, spatiere exterioara 200 mm
- Diametru $\varphi = 25$ mm, acoperire 50 mm
- Procent de armare $\rho = 1.89\%$

Legi de material (BAEL 91)

- Beton: $f_{c28} = 40$ MPa, $\theta = 0.85$
- Otel: $f_e = 500$ MPa, fisurare P

Curba de rigiditate este calculata in incovoiere pura pe axa tare: componenta libera este M_y (curbura χ_y), cu $N = 0$ si $M_z = 0$ fixe. Starea limita este SLU Persistent si Tranzitoriu. Sectiunea este tipica tablierelor de pod; inertia mare produce un EI initial ridicat, iar golul amplifica scaderea rigiditatii dupa fisurare.

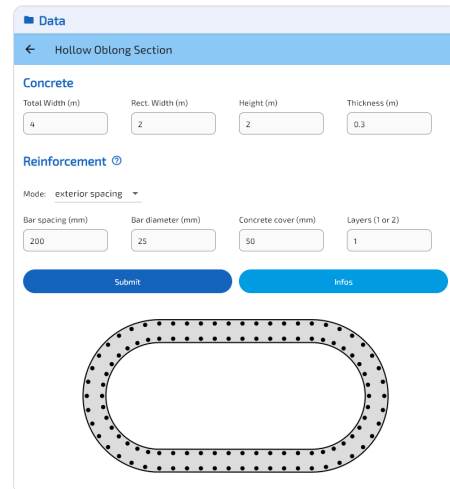


Figura 6: Sectiune oblonga tubulara.

Curba $M_y-\chi$ si rigiditatea tangenta

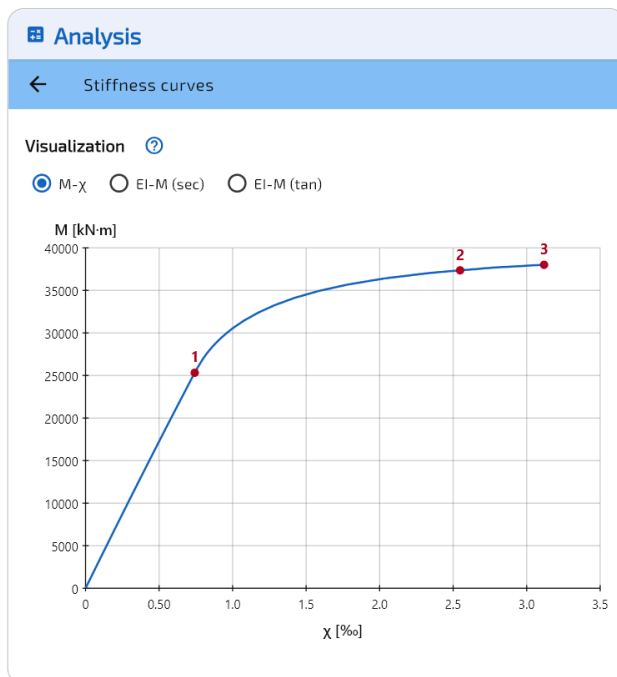


Figura 7: Diagrama moment-curbura.

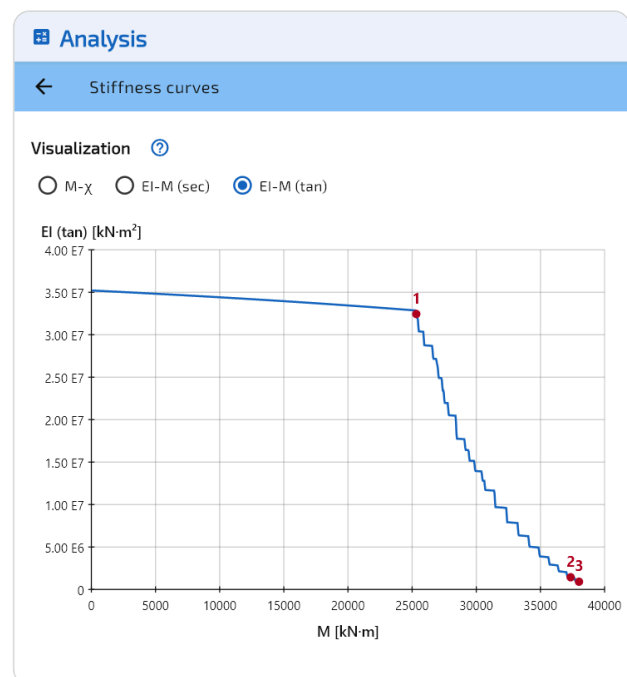


Figura 8: Rigiditate tangenta EI_{tan} .

Curba $M-\chi$ arata ca degradarea rigiditatii incepe la evenimentul #1 (curgerea otelului). Momentul ultim depaseste momentul de curgere cu 50%. Curba se termina prin ruperea otelului (evenimentul #3), nu prin zdrobirea betonului. Modul de rupere difera fata de sectiunea dreptunghiulara, unde

ε_{cu2} a fost atins primul. Nu toate evenimentele apar pentru toate sectiunile: modul de rupere depinde de geometrie, armatura si legile de material.

Rigiditatea tangenta ramane cvasi-constanta in domeniul elastic. Scaderea incepe la evenimentul #1, iar modelul in trepte (mai pronuntat aici decat la sectiunea dreptunghiulara) reflecta curgerea progresiva a barelor de armatura pe perimetru. Dupa evenimentul #2, EI_{tan} continua sa scada, ajungand la doua ordine de marime sub valoarea initiala la rupere.

Rigiditatea secanta EI_{sec} si rigiditatea axiala EA

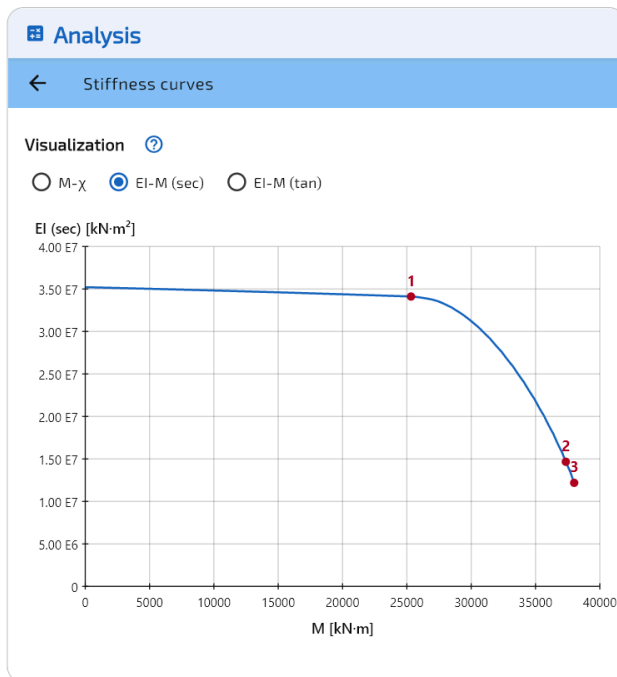


Figura 9: Rigiditate secanta EI_{sec} .

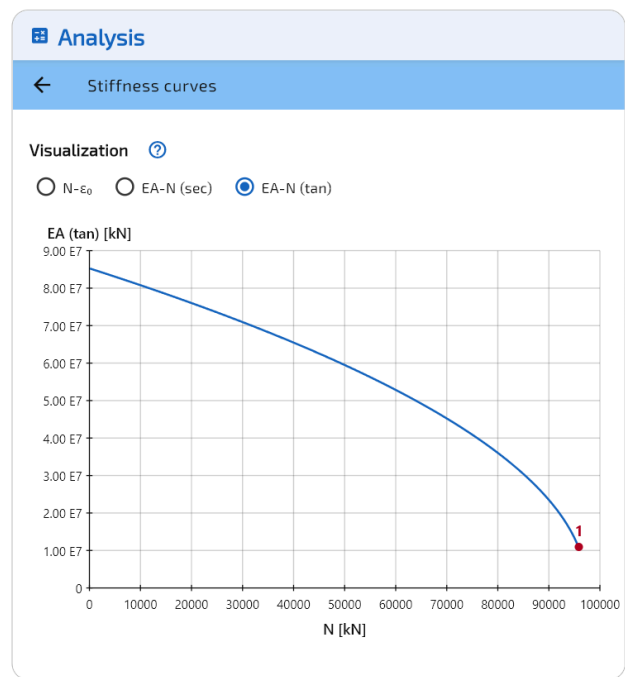


Figura 10: Rigiditate axiala EA .

Rigiditatea secanta se degradeaza treptat: doar 3% scadere la evenimentul #1 (curgerea otelului). Curba devine mai abrupta dupa evenimentul #2 (palierul plastic al betonului), iar la rupere ramane circa 35% din rigiditatea initiala. Scaderea relativa mai mica fata de sectiunea dreptunghiulara (65% vs. 89%) este tipica sectiunilor tubulare cu procente ridicate de armare.

Evenimente de rigiditate ($M-\chi$)

#	Material	$\varepsilon_c / \varepsilon_s$ (‰)	χ_y (‰)	M_y (kN·m)	EI_{sec} (kN·m ²)	EI_{tan} (kN·m ²)
1	Otel	2.174	0.742	25 324	3.411E7	3.244E7
2	Beton	-2.000	2.547	37 356	1.466E7	1.439E6
3	Otel	10.000	3.119	38 006	1.219E7	9.154E5

Evenimentul #1 este curgerea otelului ($\varepsilon_s = 2.174$ ‰). Evenimentul #2 marcheaza atingerea palierului plastic al betonului ($\varepsilon_{c2} = 2.000$ ‰). Evenimentul #3 este ruperea otelului la $\varepsilon_{ud} = 10.0$ ‰ (alungirea ultima de calcul BAEL), terminand curba. Spre deosebire de sectiunea dreptunghiulara unde ruperea era guvernata de zdrobirea betonului (ε_{cu2}), aici sectiunea cedeaza prin ruperea otelului, ilustrand ca evenimentele declansate depind de geometrie si armatura.

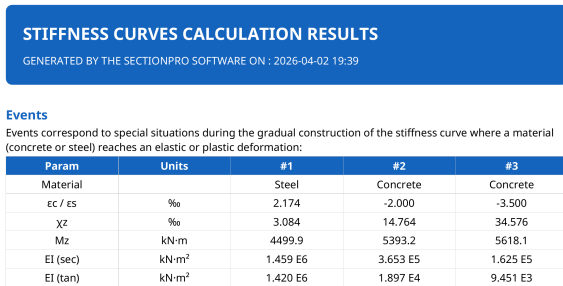
Benchmark de performanta

Puncte de discretizare	Dreptunghiulara EC2 (ms)	Oblonga BAEL (ms)
100	5.2	6.5
500	15.5	11.3
1 000 (implicit)	17.3	19.5
5 000	61.0	60.9

Calculul este practic instantaneu indiferent de numarul de puncte de discretizare: chiar si la 5 000 de puncte, ambele sectiuni se finalizeaza in sub 61 ms.

Export

SectionPro exporta valorile curbelor in formate PDF, TXT si XLS pentru reutilizare in instrumente externe. Exportul PDF include si vizualizari ale curbelor.



Visualization
Below are the stiffness curves and associated events

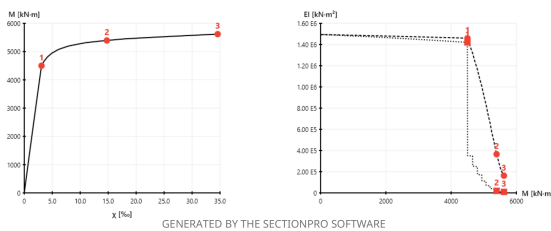
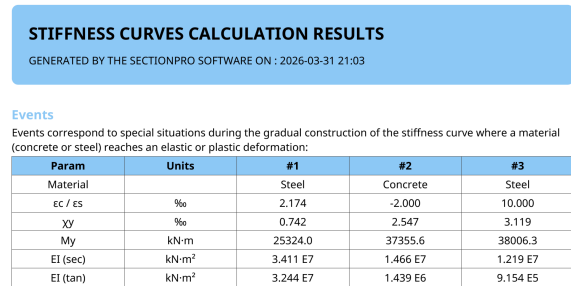


Figura 11: Export PDF, sectiune dreptunghiulara.



Visualization
Below are the stiffness curves and associated events

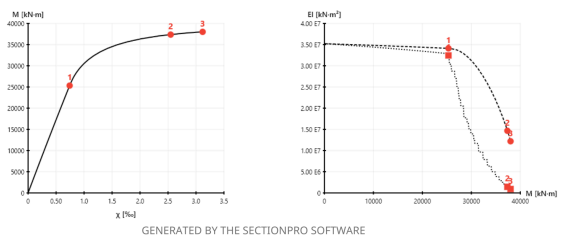


Figura 12: Export PDF, sectiune oblonga.

Concluzie

Modulul de curbe de rigiditate furnizeaza evolutia reala a rigiditatii de incovoiere si axiale in functie de starea de incarcare. Variind o componenta de forta de la zero la rupere, capteaza traseul complet de degradare, de la raspunsul elastic initial prin curgerea progresiva pana la rupere, si raporteaza curburile si deformatiile axiale la fiecare nivel de incarcare.

Rigiditatile secante si tangente (EI_{sec} , EI_{tan} , EA) ofera inginerilor valorile reale de rigiditate pentru modelele structurale, inlocuind ipoteza conventionala de EI constant. Evenimentele de rigiditate detectate automat identifica tranzitiile cheie pe legile constitutive (elastic-plastic, palier, rupere) cu nivelurile de forta si valorile de rigiditate asociate.