

Curvas de Rigidez

Tutorial SectionPro: diagramas momento-curvatura e degradação da rigidez flexional sob carregamento crescente

BridgeKernel · 2026

Introdução

O betão armado não é um material linear: a sua rigidez flexional EI depende do nível de carga. Para cargas baixas, os materiais permanecem no domínio elástico (aço) ou na tangente inicial (betão), pelo que EI é elevada. Com o aumento do carregamento, o betão entra no ramo descendente da lei parábola-rectângulo e o aço atinge o patamar de cedência, provocando a queda de EI . Esta degradação importa para estimar deslocamentos realistas e, mais geralmente, quando os esforços internos dependem da distribuição de rigidezes: estruturas hiperestáticas, análise de segunda ordem e redistribuição.

SectionPro traça a resposta completa da secção fixando duas componentes de esforço e aumentando a terceira (N , M_z ou M_y) de zero até à rotura. Em cada passo, resolve-se um equilíbrio iterativo para determinar o estado de extensão. A abordagem trata também a flexão biaxial: variando N , observa-se como a curva $M-\chi$ se desloca, com a compressão a rigidificar a resposta e a tracção a amolecê-la. São produzidas três curvas: esforço-deformação ($M-\chi$), rigidez secante EI_{sec} e rigidez tangente EI_{tan} . A rigidez secante (declive da origem ao ponto corrente) representa a rigidez média ao longo do percurso de carga, usada em análise MEF iterativa. A rigidez tangente (declive instantâneo) fornece a rigidez exacta para um dado estado de carga, usada em análise não linear com actualização da matriz de rigidez a cada passo.

O solver detecta também *eventos de rigidez*, transições-chave nas leis constitutivas: elasticidade para plasticidade e rotura. Para o aço, os eventos podem ocorrer em tracção e em compressão; para o betão, em compressão (patamar plástico em ε_{c2} e esmagamento em ε_{cu2}). Cada evento é reportado com o participante, limiar de extensão, nível de esforço e correspondentes EI_{sec} e EI_{tan} .

Resultados calculados

Curvas

$M-\chi$, $N-\varepsilon_0$
 EI_{sec} , EI_{tan} vs. carga
 EA_{sec} , EA_{tan} vs. carga

Tabela de eventos

Participante: betão / aço
Limiar de extensão crítico
Esforço, EI ou EA no evento
Cedência, patamar plástico, esmagamento

Exportações

PDF: curvas de rigidez + tabela de eventos
XLS / TXT: percurso de carga completo + eventos

Secção rectangular (Eurocódigo 2)

Dados de entrada

Betão

- Secção transversal rectangular maciça
- Largura = 2.00 m, Altura = 1.00 m

Armadura

- 56 varões, espaçamento uniforme 100 mm
- Diâmetro $\varphi = 25$ mm, recobrimento 50 mm
- Taxa de armadura $\rho = 1.37\%$

Leis dos materiais (EC2)

- Betão C40/50: $f_{ck} = 40$ MPa
- Aço B500B: $f_{yk} = 500$ MPa

The screenshot shows a 'Data' window for a 'Solid Rectangular Section'. Under 'Concrete', the width is 2m and height is 1m. Under 'Reinforcement', the mode is 'uniform spacing', bar spacing is 100mm, bar diameter is 25mm, concrete cover is 50mm, and there is 1 layer. A diagram at the bottom shows a rectangular cross-section with reinforcement bars.

Figura 1: Secção transversal rectangular.

A curva de rigidez é calculada em flexão simples: a componente livre é M_z (curvatura χ_z) com $N = 0$ e $M_y = 0$ fixos. O estado limite é o ELU Fundamental ($\gamma_c = 1.50$, $\gamma_s = 1.15$). A curvatura varia de zero até à rotura; em cada passo calculam-se o momento e a rigidez correspondentes.

Curva $M_z-\chi$ e rigidez tangente

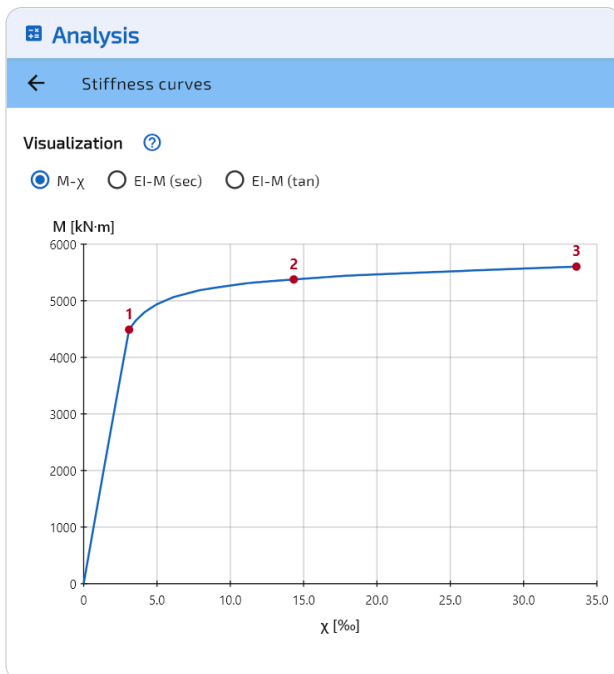


Figura 2: Diagrama momento-curvatura.

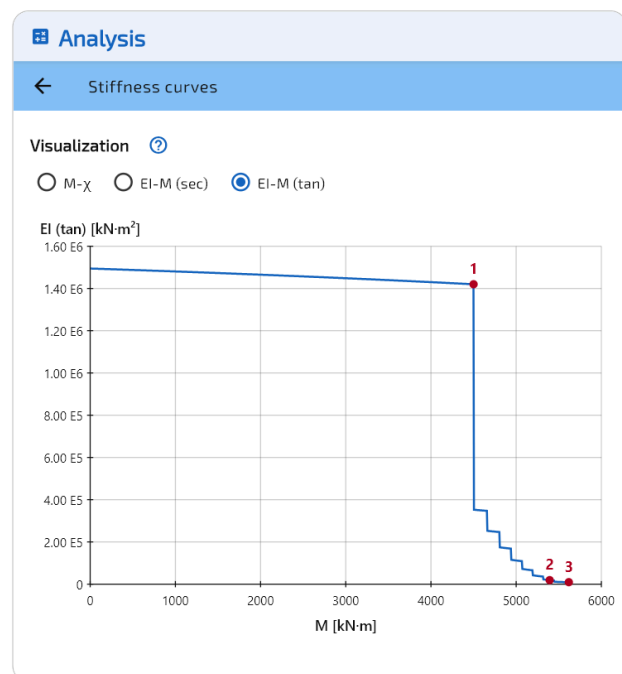


Figura 3: Rigidez tangente EI_{tan} .

A curva $M-\chi$ apresenta a forma clássica: ramo inicial íngreme com módulos tangentes elevados, joelho de transição no evento #1 (cedência do aço) e longo patamar plástico onde curvatura adicional produz pouco momento suplementar. O momento último é apenas 25% superior ao de cedência, mas a curvatura aumentou dez vezes.

A rigidez tangente mantém-se quase constante no domínio elástico, caindo abruptamente no evento #1. A queda é brusca porque todos os varões da camada inferior partilham a mesma coordenada y e cedem simultaneamente; sendo a armadura principal de flexão, a perda de rigidez é imediata (EI_{\tan} dividida por 4 neste evento). Com varões a diferentes profundidades, a cedência é progressiva e a curva tangente apresenta um padrão em escada. Após o evento #2, EI_{\tan} cai para valores próximos de zero, reflectindo o patamar plástico quase plano na curva $M-\chi$.

Rigidez secante EI_{sec} e rigidez axial EA

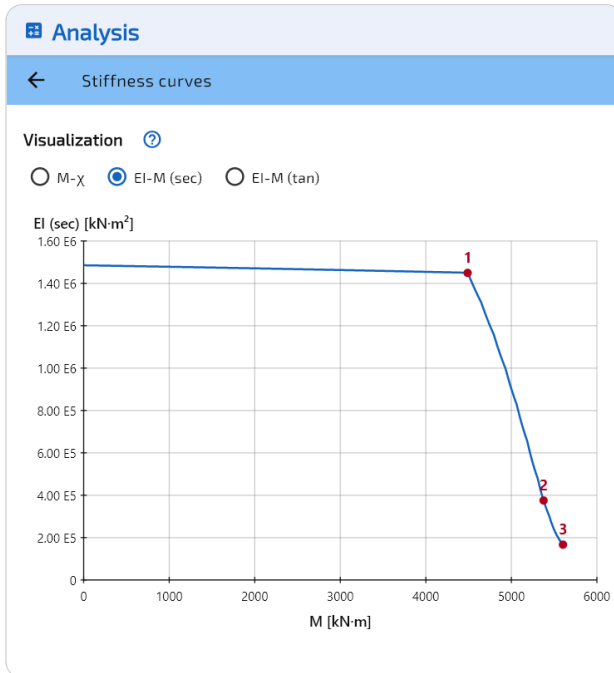


Figura 4: Rigidez secante EI_{sec} .

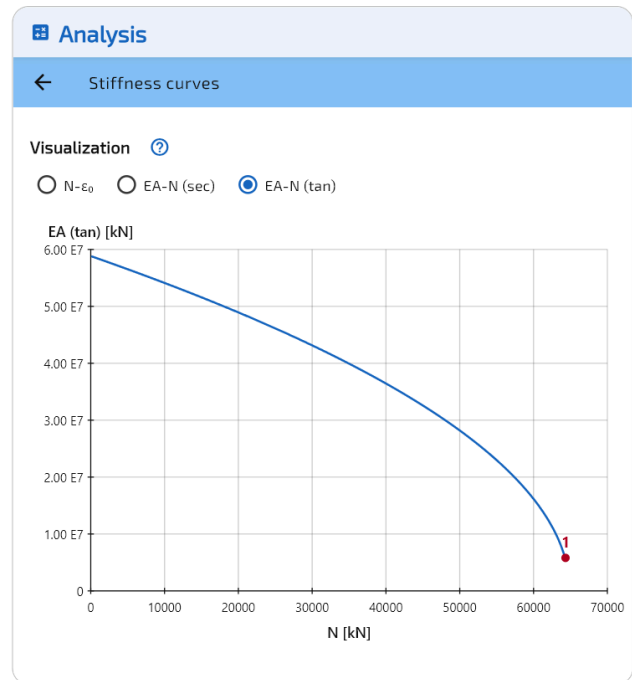


Figura 5: Rigidez axial EA .

A rigidez secante mantém-se praticamente constante no domínio elástico. A queda começa no evento #1 (cedência do aço), com apenas 2% de redução. A descida acentuada ocorre entre os eventos #1 e #2, à medida que o aço cede e o betão entra no patamar plástico. Na rotura, restam cerca de 11% da rigidez inicial.

A rigidez axial EA segue um padrão mais simples: diminui à medida que o módulo tangente da lei parábola-rectângulo decresce com o aumento da extensão de compressão. A curva termina ao atingir a extensão última de compressão do betão.

Eventos de rigidez ($M-\chi$)

O solver detecta três eventos na curva $M-\chi$ para esta secção e estado limite:

#	Material	$\varepsilon_c / \varepsilon_s$ (‰)	χ_z (‰)	M_z (kN·m)	EI_{sec} (kN·m ²)	EI_{tan} (kN·m ²)
1	Aço	2.174	3.084	4 500	1.459E6	1.420E6
2	Betão	-2.000	14.764	5 393	3.653E5	1.897E4
3	Betão	-3.500	34.576	5 618	1.625E5	9.451E3

O evento #1 é o início da cedência do aço ($\varepsilon_s = f_{yd}/E_s = 434.8/200\,000 = 2.174\%$). O evento #2 marca o betão a atingir o patamar plástico $\varepsilon_{c2} = 2.000\%$. O evento #3 é o esmagamento do betão em $\varepsilon_{cu2} = 3.500\%$, terminando a curva.

Secção oblonga oca (BAEL 91)

Dados de entrada

Betão

- Secção transversal oblonga oca
- Largura total = 4.00 m, Altura = 2.00 m
- Largura rectangular = 2.00 m, Espessura = 0.30 m

Armadura

- 108 varões, espaçamento exterior 200 mm
- Diâmetro $\varphi = 25$ mm, recobrimento 50 mm
- Taxa de armadura $\rho = 1.89\%$

Leis dos materiais (BAEL 91)

- Betão: $f_{c28} = 40$ MPa, $\theta = 0.85$
- Aço: $f_e = 500$ MPa, fissuration P

A curva de rigidez é calculada em flexão simples segundo o eixo forte: a componente livre é M_y (curvatura χ_y) com $N = 0$ e $M_z = 0$ fixos. O estado limite é o ELU Persistente & Transitório. Secção típica de tabuleiros de pontes: a grande inércia produz um EI inicial elevado e o núcleo oco amplifica a queda de rigidez após fendilhação.

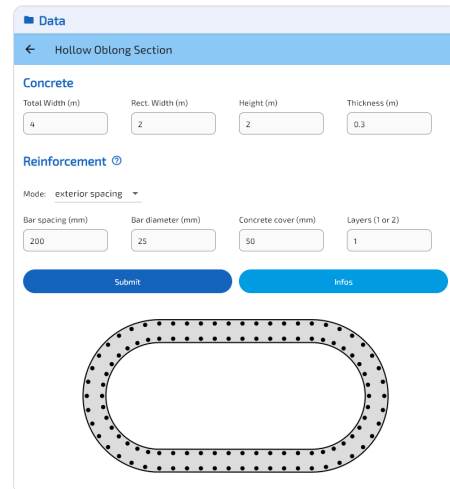


Figura 6: Secção oblonga oca.

Curva $M_y-\chi$ e rigidez tangente

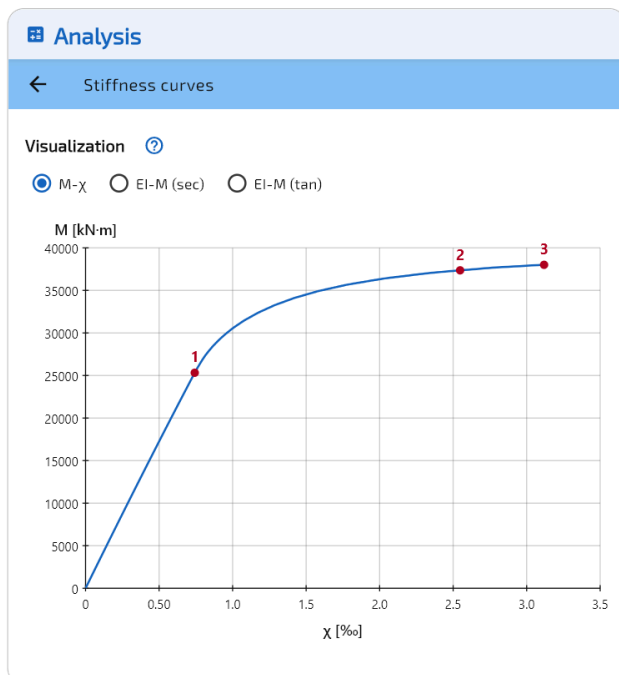


Figura 7: Diagrama momento-curvatura.

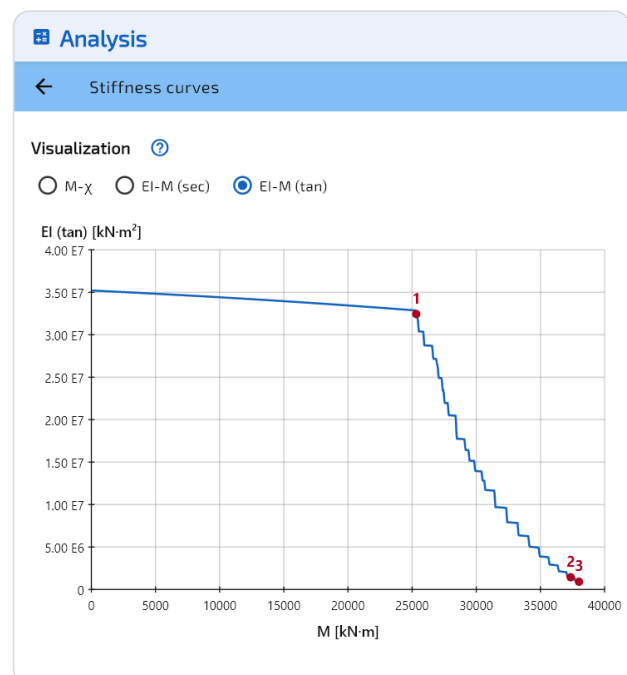


Figura 8: Rigidez tangente EI_{tan} .

A curva $M-\chi$ mostra que a degradação da rigidez começa no evento #1 (cedência do aço). O momento último é 50% superior ao de cedência. Aqui, a curva termina por rotura do aço (evento #3) em vez de esmagamento do betão – modo de rotura diferente da secção rectangular, onde ε_{cu2} foi

atingido primeiro. Nem todos os eventos ocorrem para todas as secções: o modo de rotura depende da geometria, da armadura e das leis dos materiais.

A rigidez tangente mantém-se quase constante no domínio elástico. A queda começa no evento #1 e o padrão em escada (mais pronunciado aqui do que na secção rectangular) reflecte a cedência progressiva dos varões ao longo do perímetro. Após o evento #2, EI_{tan} continua a diminuir, atingindo duas ordens de grandeza abaixo do valor inicial na rotura.

Rigidez secante EI_{sec} e rigidez axial EA

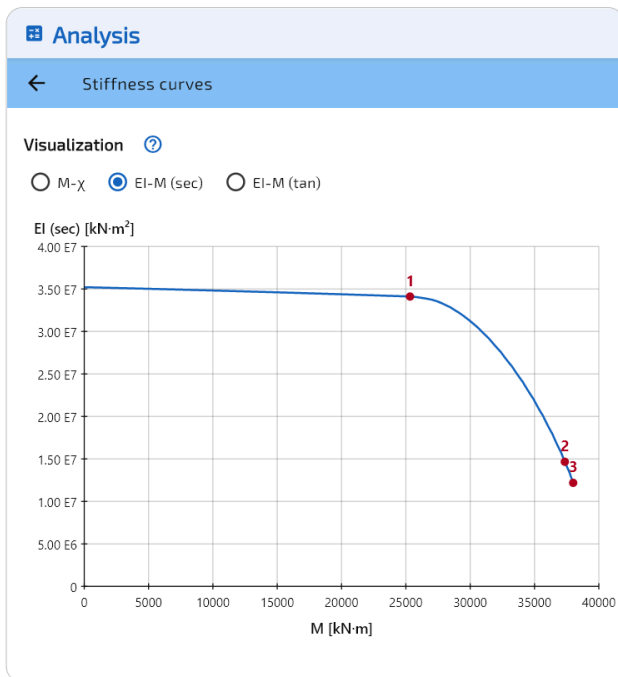


Figura 9: Rigidez secante EI_{sec} .

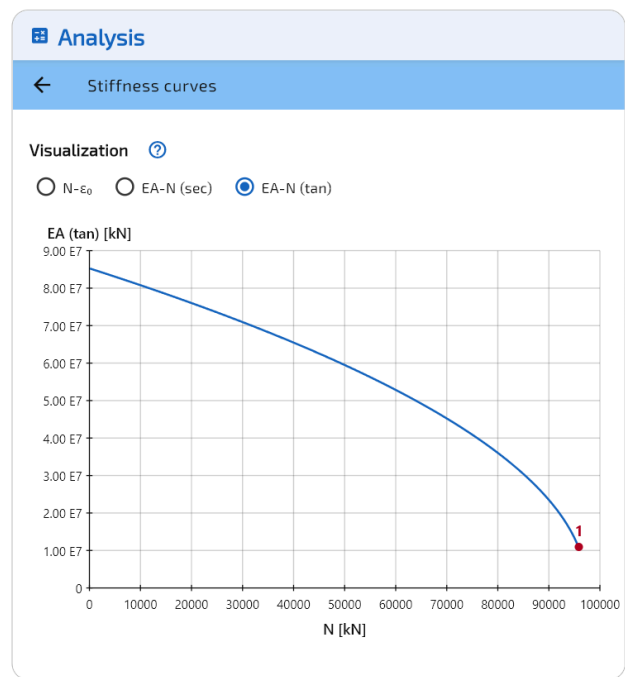


Figura 10: Rigidez axial EA .

A rigidez secante degrada-se gradualmente: apenas 3% de queda no evento #1 (cedência do aço). A curva acentua-se após o evento #2 (patamar plástico do betão) e na rotura restam cerca de 35% da rigidez inicial. A menor queda relativa face à secção rectangular (65% vs. 89%) é típica de secções ocas com elevadas taxas de armadura.

Eventos de rigidez ($M-\chi$)

#	Material	$\varepsilon_c / \varepsilon_s$ (‰)	χ_y (‰)	M_y (kN·m)	EI_{sec} (kN·m ²)	EI_{tan} (kN·m ²)
1	Aço	2.174	0.742	25 324	3.411E7	3.244E7
2	Betão	-2.000	2.547	37 356	1.466E7	1.439E6
3	Aço	10.000	3.119	38 006	1.219E7	9.154E5

O evento #1 é o início da cedência do aço ($\varepsilon_s = 2.174$ ‰). O evento #2 marca o betão a atingir o patamar plástico ($\varepsilon_{c2} = 2.000$ ‰). O evento #3 é a rotura do aço em $\varepsilon_{ud} = 10.0$ ‰ (extensão última de cálculo BAEL), terminando a curva. Ao contrário da secção rectangular, onde a rotura era governada pelo esmagamento do betão (ε_{cu2}), aqui a rotura ocorre pelo aço, ilustrando que os eventos desencadeados dependem da geometria e da armadura.

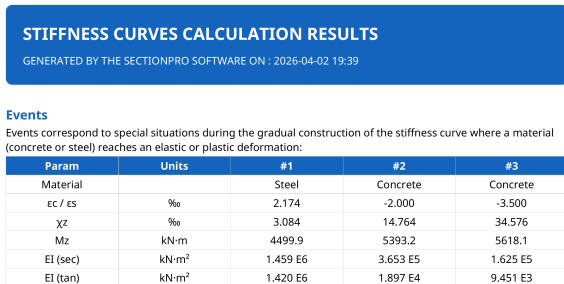
Benchmark de desempenho

Pontos de discretização	Rectangular EC2 (ms)	Oblonga BAEL (ms)
100	5.2	6.5
500	15.5	11.3
1 000 (predefinição)	17.3	19.5
5 000	61.0	60.9

O cálculo é essencialmente instantâneo independentemente do número de pontos de discretização: mesmo com 5 000 pontos, ambas as secções completam em menos de 61 ms.

Exportação

SectionPro exporta os valores das curvas em formato PDF, TXT e XLS para reutilização em ferramentas externas. A exportação PDF inclui também visualizações das curvas.



Visualization
Below are the stiffness curves and associated events

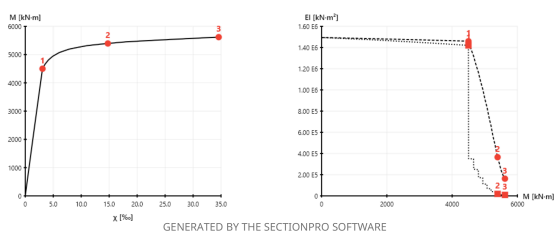
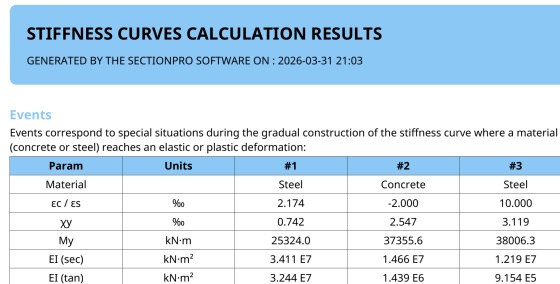


Figura 11: Exportação PDF, secção rectangular.



Visualization
Below are the stiffness curves and associated events

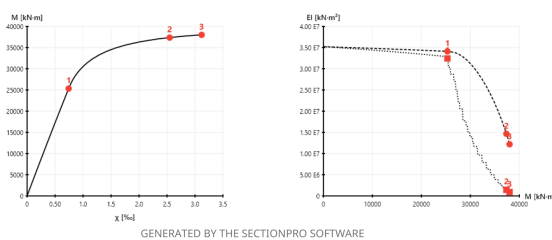


Figura 12: Exportação PDF, secção oblonga.

Conclusão

O módulo de curvas de rigidez fornece a evolução real da rigidez flexional e axial em função do estado de carga. Varrendo uma componente de esforço de zero até à rotura, capta o percurso completo de degradação – da resposta elástica inicial à cedência progressiva e à rotura – e reporta curvaturas e extensões axiais em cada nível de carga.

As rigidezes secante e tangente (EI_{sec} , EI_{tan} , EA) fornecem aos engenheiros os valores reais de rigidez para os modelos estruturais, substituindo a hipótese convencional de EI constante. Os eventos de rigidez detectados automaticamente identificam as transições-chave nas leis constitutivas (elástico-plástico, patamar e rotura) com os níveis de esforço e valores de rigidez associados.