

Curvas de Rigidez

Tutorial SectionPro: diagramas momento-curvatura e degradação da rigidez flexional sob carregamento crescente

BridgeKernel · 2026

Introdução

O concreto armado não é um material linear: sua rigidez flexional EI depende do nível de carga. Sob cargas baixas, os materiais permanecem no domínio elástico (aço) ou tangente inicial (concreto), e EI é elevado. Com o aumento do carregamento, o concreto entra no ramo descendente de sua lei parábola-retângulo e o aço atinge o patamar de escoamento, causando queda de EI . Essa degradação importa para estimar deslocamentos realistas, mas também na análise estrutural quando os esforços internos dependem da distribuição de rigidezes, como em estruturas hiperestáticas, análise de segunda ordem e redistribuição.

SectionPro traça a resposta completa da seção fixando duas componentes de esforço e incrementando a terceira (N , M_z ou M_y) de zero até a ruptura. A cada passo, um equilíbrio iterativo determina o estado de deformação. A abordagem também trata flexão biaxial: variando N fixo, observa-se como a curva $M-\chi$ se desloca, com compressão enrijecendo e tração amolecendo a resposta. Três curvas são produzidas: esforço-deformação ($M-\chi$), rigidez secante EI_{sec} e rigidez tangente EI_{tan} . A rigidez secante (inclinação da origem ao ponto atual) representa a rigidez média ao longo do carregamento, usada em análise iterativa por MEF. A rigidez tangente (inclinação instantânea) fornece a rigidez exata para um dado estado de carga, usada em análise não linear com atualização da matriz de rigidez a cada passo.

O solver também detecta *eventos de rigidez*, transições-chave nas leis constitutivas: elasticidade para plasticidade e ruptura. Para o aço, eventos podem ocorrer em tração e compressão; para o concreto, em compressão (patamar plástico em ε_{c2} e esmagamento em ε_{cu2}). Cada evento é relatado com o participante, limiar de deformação, nível de esforço e os correspondentes EI_{sec} e EI_{tan} .

Resultados calculados

Curvas

$M-\chi$, $N-\varepsilon_0$
 EI_{sec} , EI_{tan} vs. carga
 EA_{sec} , EA_{tan} vs. carga

Tabela de eventos

Participante: concreto / aço
Limiar de deformação crítico
Esforço, EI ou EA no evento
Escoamento, patamar plástico, esmagamento

Exportações

PDF: curvas de rigidez + tabela de eventos
XLS / TXT: caminho de carga completo + eventos

Seção retangular (Eurocode 2)

Dados de entrada

Concreto

- Seção transversal retangular maciça
- Largura = 2,00 m, Altura = 1,00 m

Armadura

- 56 barras, espaçamento uniforme de 100 mm
- Diâmetro $\varphi = 25$ mm, cobrimento 50 mm
- Taxa de armadura $\rho = 1,37\%$

Leis dos materiais (EC2)

- Concreto C40/50: $f_{ck} = 40$ MPa
- Aço B500B: $f_{yk} = 500$ MPa

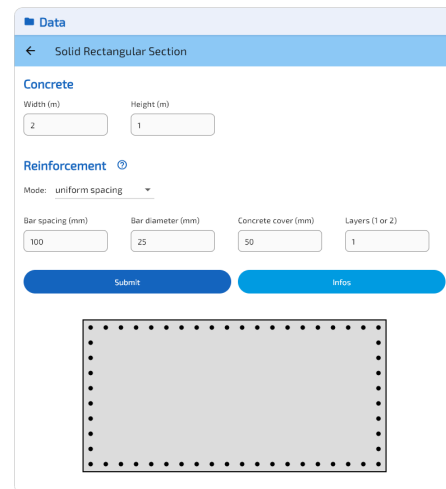


Figura 1: Seção transversal retangular.

A curva de rigidez é calculada em flexão pura: a componente livre é M_z (curvatura χ_z) com $N = 0$ e $M_y = 0$ fixos. O estado limite é ELU Fundamental ($\gamma_c = 1,50$, $\gamma_s = 1,15$). A curvatura varia de zero até a ruptura, e a cada passo o momento e a rigidez são calculados.

Curva $M_z-\chi$ e rigidez tangente

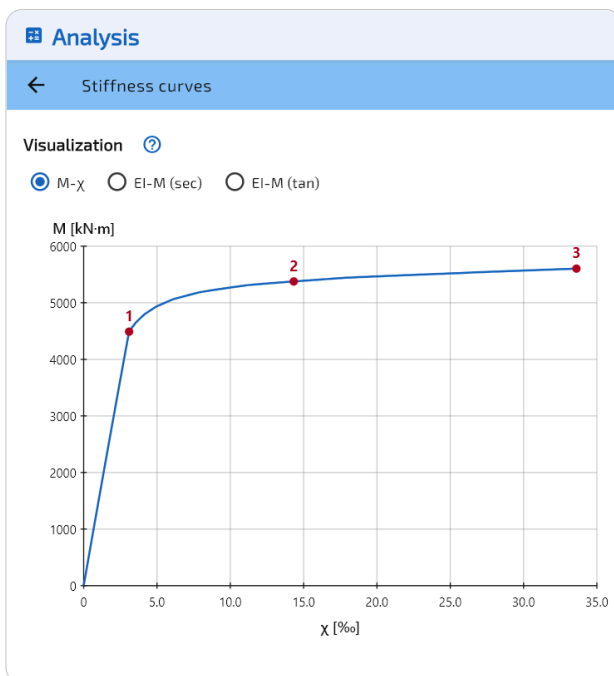


Figura 2: Diagrama momento-curvatura.

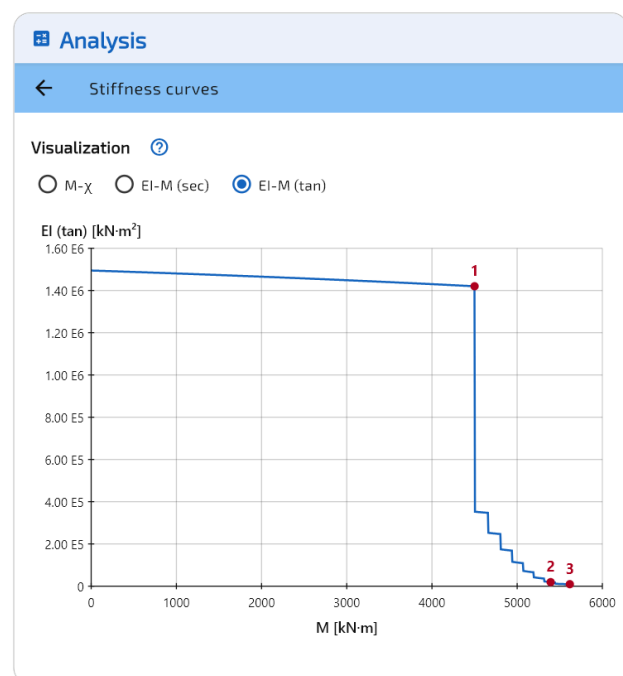


Figura 3: Rigidez tangente EI_{tan} .

A curva $M-\chi$ apresenta a forma clássica: um ramo inicial íngreme onde os módulos tangentes são elevados, um joelho de transição no evento #1 (escoamento do aço) e um longo patamar plástico onde curvatura adicional produz pouco momento extra. O momento último é apenas 25% superior ao momento de escoamento, mas a curvatura aumentou dez vezes.

A rigidez tangente permanece quase constante no domínio elástico, depois cai abruptamente no evento #1. A queda é brusca porque todas as barras da camada inferior compartilham a mesma coordenada y e escoam simultaneamente; sendo a armadura principal de flexão, a perda de rigidez é imediata (EI_{\tan} dividido por 4 neste único evento). Com barras distribuídas em diferentes profundidades, o escoamento é progressivo e a curva tangente apresenta um padrão em escada. Após o evento #2, EI_{\tan} cai para próximo de zero, refletindo o patamar plástico quase plano na curva $M-\chi$.

Rigidez secante EI_{sec} e rigidez axial EA

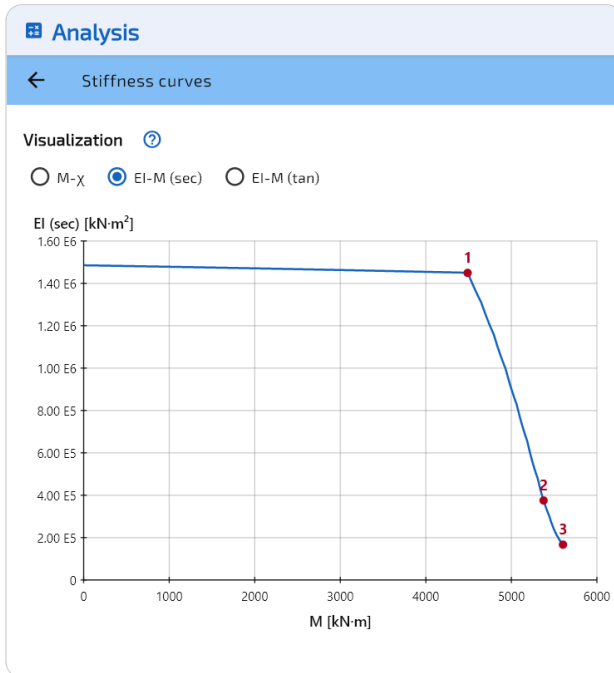


Figura 4: Rigidez secante EI_{sec} .

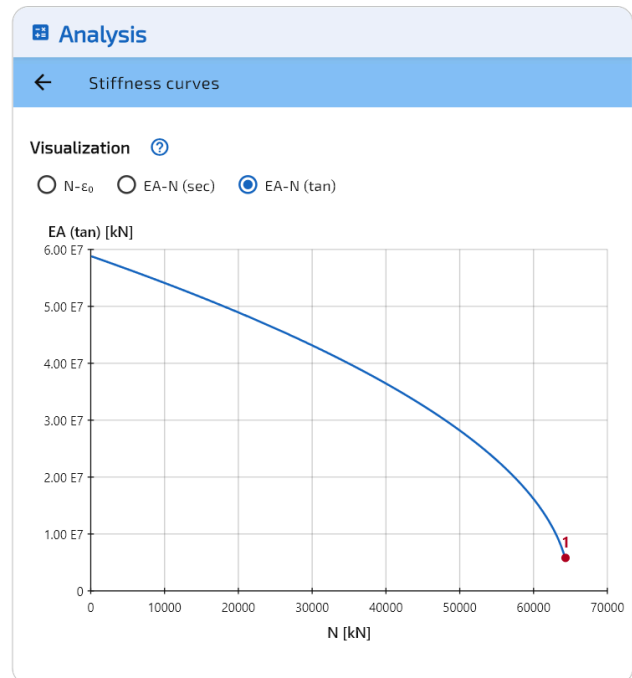


Figura 5: Rigidez axial EA .

A rigidez secante permanece praticamente constante no domínio elástico. A queda começa no evento #1 (escoamento do aço), com apenas 2% de redução. A queda acentuada ocorre entre os eventos #1 e #2, quando o aço escoam e o concreto entra no patamar plástico. Na ruptura, restam apenas cerca de 11% da rigidez inicial.

A rigidez axial EA segue um padrão mais simples: diminui à medida que o módulo tangente da lei parábola-retângulo decresce sob deformação compressiva crescente. A curva termina quando a seção atinge a deformação última de compressão do concreto.

Eventos de rigidez ($M-\chi$)

O solver detecta três eventos ao longo da curva $M-\chi$ para esta seção e estado limite:

| # | Material | $\varepsilon_c / \varepsilon_s$ (‰) | χ_z (‰) | M_z (kN·m) | EI_{sec} (kN·m ²) | EI_{tan} (kN·m ²) |
|---|----------|-------------------------------------|--------------|--------------|--|--|
| 1 | Aço | 2.174 | 3.084 | 4 500 | 1.459E6 | 1.420E6 |
| 2 | Concreto | -2.000 | 14.764 | 5 393 | 3.653E5 | 1.897E4 |
| 3 | Concreto | -3.500 | 34.576 | 5 618 | 1.625E5 | 9.451E3 |

O evento #1 é o escoamento do aço ($\varepsilon_s = f_{yd}/E_s = 434,8/200\,000 = 2,174\%$). O evento #2 marca o concreto atingindo o patamar plástico $\varepsilon_{c2} = 2,000\%$. O evento #3 é o esmagamento do concreto em $\varepsilon_{cu2} = 3,500\%$, encerrando a curva.

Seção oblonga vazada (BAEL 91)

Dados de entrada

Concreto

- Seção transversal oblonga vazada
- Largura total = 4,00 m, Altura = 2,00 m
- Largura retangular = 2,00 m, Espessura = 0,30 m

Armadura

- 108 barras, espaçamento exterior de 200 mm
- Diâmetro $\varphi = 25$ mm, cobrimento 50 mm
- Taxa de armadura $\rho = 1,89\%$

Leis dos materiais (BAEL 91)

- Concreto: $f_{c28} = 40$ MPa, $\theta = 0,85$
- Aço: $f_e = 500$ MPa, fissuração P

A curva de rigidez é calculada em flexão pura em torno do eixo forte: a componente livre é M_y (curvatura χ_y) com $N = 0$ e $M_z = 0$ fixos. O estado limite é ELU Persistente & Transitório. Esta seção é típica de tabuleiros de pontes; a grande inércia produz um EI inicial elevado e o núcleo vazado amplifica a queda de rigidez após a fissuração.

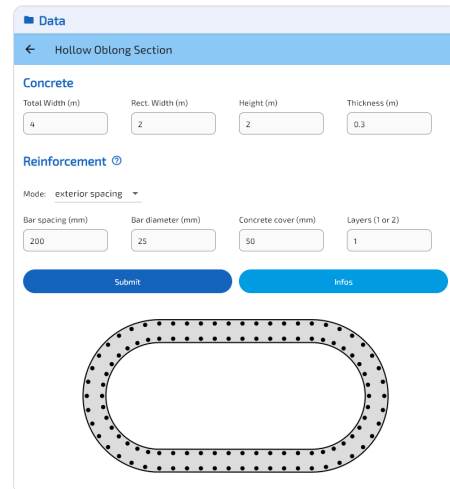


Figura 6: Seção oblonga vazada.

Curva $M_y-\chi$ e rigidez tangente

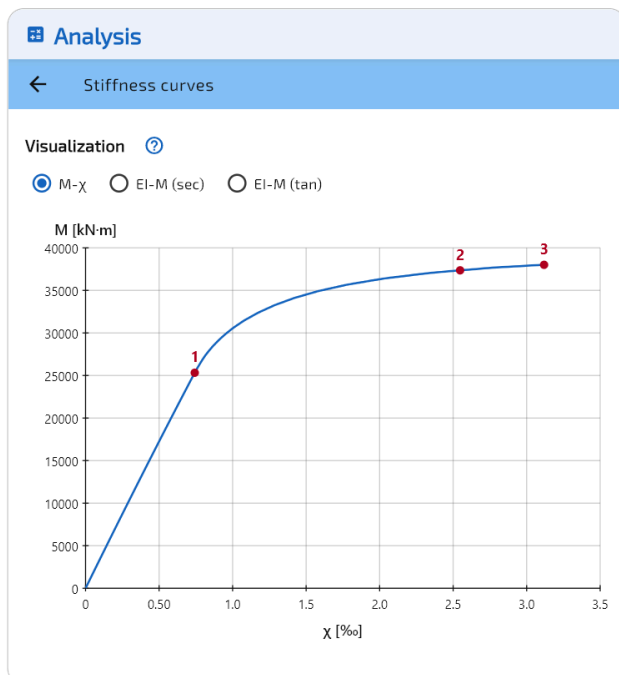


Figura 7: Diagrama momento-curvatura.

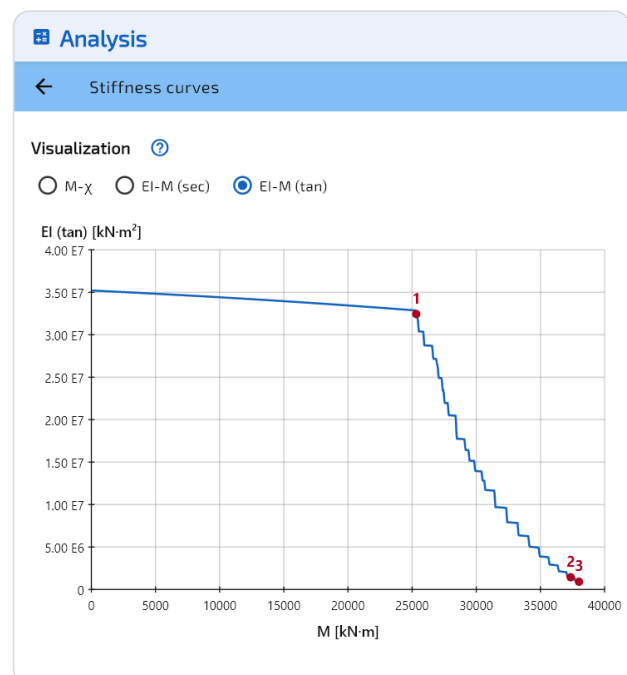


Figura 8: Rigidez tangente EI_{tan} .

A curva $M-\chi$ mostra que a degradação da rigidez começa no evento #1 (escoamento do aço). O momento último é 50% superior ao de escoamento. Aqui, a curva termina por ruptura do aço (evento #3) e não por esmagamento do concreto – modo de ruptura diferente da seção retangular, onde ε_{cu2}

foi atingido primeiro. Nem todos os eventos ocorrem para todas as seções: o modo de ruptura depende da geometria, da armadura e das leis dos materiais.

A rigidez tangente permanece quase constante no domínio elástico. A queda começa no evento #1, e o padrão em escada (mais pronunciado aqui que na seção retangular) reflete o escoamento progressivo das barras ao redor do perímetro. Após o evento #2, EI_{tan} continua a cair, atingindo duas ordens de grandeza abaixo do valor inicial na ruptura.

Rigidez secante EI_{sec} e rigidez axial EA

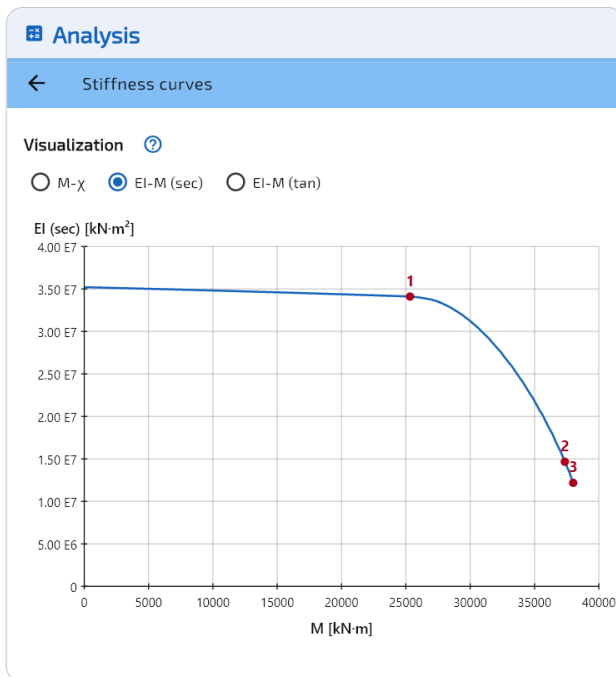


Figura 9: Rigidez secante EI_{sec} .

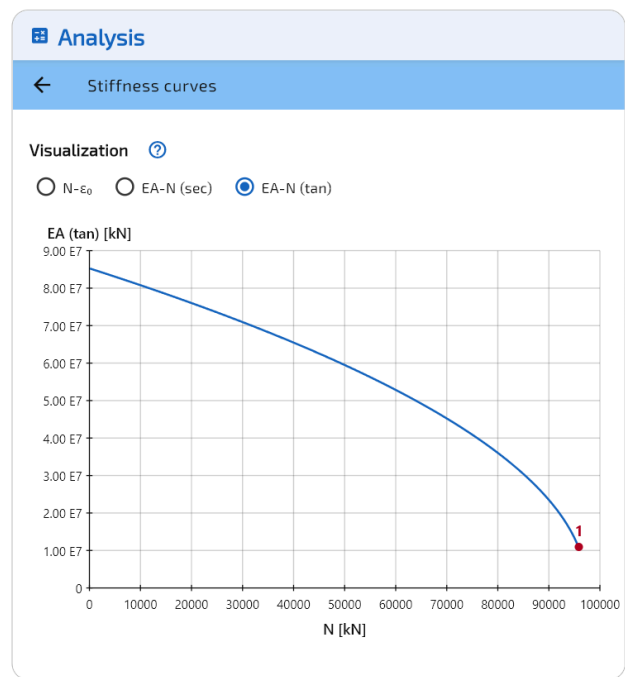


Figura 10: Rigidez axial EA .

A rigidez secante degrada-se gradualmente: apenas 3% de queda no evento #1 (escoamento do aço). A curva acentua-se após o evento #2 (patamar plástico do concreto), e na ruptura restam cerca de 35% da rigidez inicial. A menor queda relativa comparada à seção retangular (65% vs. 89%) é típica de seções vazadas com altas taxas de armadura.

Eventos de rigidez ($M-\chi$)

| # | Material | $\varepsilon_c / \varepsilon_s$ (‰) | χ_y (‰) | M_y (kN·m) | EI_{sec} (kN·m ²) | EI_{tan} (kN·m ²) |
|---|----------|-------------------------------------|--------------|--------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 1 | Aço | 2.174 | 0.742 | 25 324 | 3.411E7 | 3.244E7 |
| 2 | Concreto | -2.000 | 2.547 | 37 356 | 1.466E7 | 1.439E6 |
| 3 | Aço | 10.000 | 3.119 | 38 006 | 1.219E7 | 9.154E5 |

O evento #1 é o escoamento do aço ($\varepsilon_s = 2,174$ ‰). O evento #2 marca o concreto atingindo o patamar plástico ($\varepsilon_{c2} = 2,000$ ‰). O evento #3 é a ruptura do aço em $\varepsilon_{ud} = 10,0$ ‰ (alongamento último de cálculo segundo o BAEL), encerrando a curva. Diferentemente da seção retangular, onde a ruptura foi governada pelo esmagamento do concreto (ε_{cu2}), esta seção rompe por ruptura do aço, ilustrando que os eventos acionados dependem da geometria e da armadura.

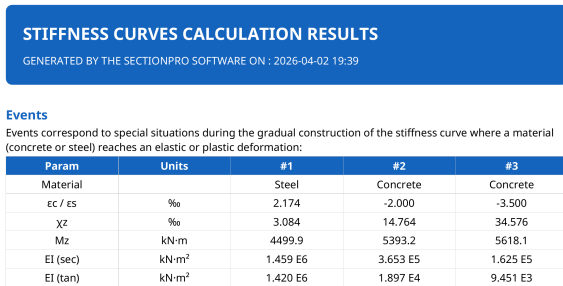
Benchmark de desempenho

| Pontos de discretização | Retangular EC2 (ms) | Oblonga BAEL (ms) |
|-------------------------|---------------------|-------------------|
| 100 | 5.2 | 6.5 |
| 500 | 15.5 | 11.3 |
| 1 000 (padrão) | 17.3 | 19.5 |
| 5 000 | 61.0 | 60.9 |

O cálculo é essencialmente instantâneo independentemente do número de pontos de discretização: mesmo com 5 000 pontos, ambas as seções completam em menos de 61 ms.

Exportação

SectionPro exporta os valores das curvas em PDF, TXT e XLS para reutilização em ferramentas externas. A exportação PDF também inclui visualizações das curvas.



Visualization
Below are the stiffness curves and associated events

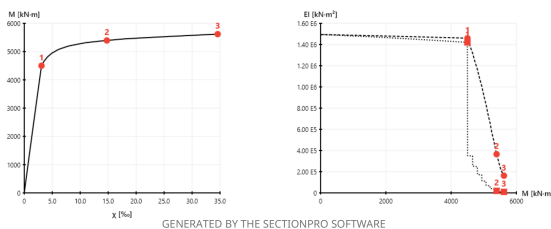
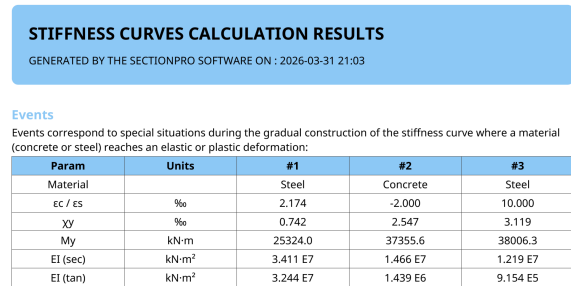


Figura 11: Exportação PDF, seção retangular.



Visualization
Below are the stiffness curves and associated events

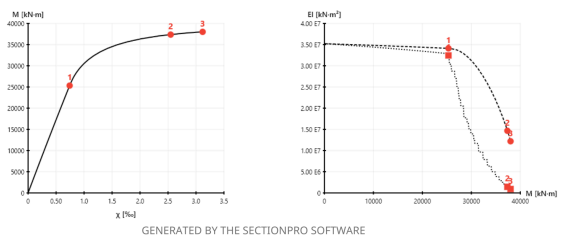


Figura 12: Exportação PDF, seção oblonga.

Conclusão

O módulo de curva de rigidez fornece a evolução real da rigidez flexional e axial em função do carregamento. Varrendo uma componente de esforço de zero até a ruptura, captura o caminho completo de degradação – da resposta elástica inicial ao escoamento progressivo até a ruptura – e relata curvaturas e deformações axiais a cada nível de carga.

As rigidezes secante e tangente (EI_{sec} , EI_{tan} , EA) fornecem aos engenheiros os valores reais de rigidez para os modelos estruturais, substituindo a hipótese convencional de EI constante. Os eventos de rigidez detectados automaticamente identificam as transições-chave nas leis constitutivas (elástico-plástico, patamar e ruptura) com seus níveis de esforço e valores de rigidez.