



Krzywe sztywności

Poradnik SectionPro: wykresy moment-krzywizna
i degradacja sztywności giętnej przy narastającym obciążeniu

BridgeKernel · 2026

Wprowadzenie

Żelbet nie jest materiałem liniowym: jego sztywność giętna EI zależy od poziomu obciążenia. Przy niskich obciążeniach materiały pozostają w zakresie sprężystym (stal) lub początkowej stycznej (beton), więc EI jest wysokie. Przy rosnącym obciążeniu beton wchodzi w gałąź opadającą prawa parabola-prostokąt, a stal osiąga półkę plastyczną — EI spada. Degradacja ta wpływa na realistyczne przemieszczenia, a szerzej na analizę konstrukcji, gdy siły wewnętrzne zależą od rozkładu sztywności: ustroje statycznie niewyznaczalne, analiza II rzędu, redystrybucja.

SectionPro wykreśla pełną odpowiedź przekroju, ustalając dwie składowe siłowe i zwiększając trzecią (N , M_z lub M_y) od zera do zniszczenia. Na każdym kroku iteracyjnie wyznaczany jest stan odkształcenia. Podejście obsługuje też zginanie dwuosiowe: zmieniając N , obserwuje się przesunięcie krzywej $M-\chi$ — ściskanie usztywnia odpowiedź, rozciąganie ją osłabia. Wyznaczane są trzy krzywe: $M-\chi$, EI_{sec} i EI_{tan} . Sztywność sieczna (nachylenie od początku do bieżącego punktu) to średnia sztywność wzdłuż ścieżki obciążenia, stosowana w iteracyjnej analizie MES. Sztywność styczna (nachylenie chwilowe) daje dokładną sztywność dla danego stanu, stosowaną w analizie nieliniowej z aktualizacją macierzy sztywności na każdym kroku.

Solver wykrywa też *zdarzenia sztywności* — kluczowe przejścia na prawach materiałowych: sprężystość-plastyczność i zerwanie. Dla stali zdarzenia mogą wystąpić przy rozciąganiu i ścisaniu; dla betonu — przy ścisaniu (półka plastyczna przy ϵ_{c2} , zmiążdżenie przy ϵ_{cu2}). Każde zdarzenie zawiera: składnik, próg odkształcenia, poziom siły, EI_{sec} i EI_{tan} .

Obliczane wyniki

Krzywe

$M-\chi$, $N-\epsilon_0$
 EI_{sec} , EI_{tan} vs. obciążenie
 EA_{sec} , EA_{tan} vs. obciążenie

Tabela zdarzeń

Składnik: beton / stal
Krytyczny próg odkształcenia
Siła, EI lub EA przy zdarzeniu
Upłastycznienie, półka plastyczna,
zmiążdżenie

Eksporty

PDF: krzywe sztywności + tabela
zdarzeń
XLS / TXT: pełna ścieżka obciążenia + zdarzenia

Przekrój prostokątny (Eurokod 2)

Dane wejściowe

Beton

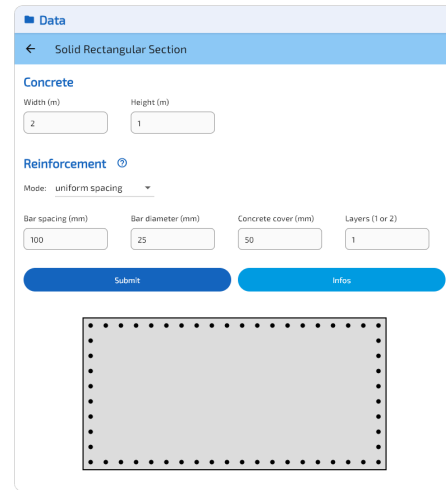
- Pełny przekrój prostokątny
- Szerokość = 2{, }00 m, Wysokość = 1{, }00 m

Zbrojenie

- 56 prętów, równomierny rozstaw 100 mm
- Średnica $\varphi = 25$ mm, otulina 50 mm
- Stopień zbrojenia $\rho = 1{, }37\%$

Zależności materiałowe (EC2)

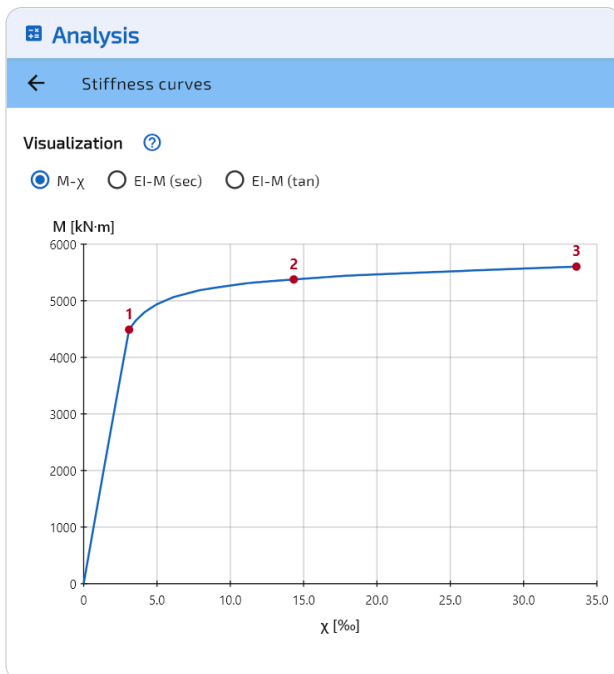
- Beton C40/50: $f_{ck} = 40$ MPa
- Stal B500B: $f_{yk} = 500$ MPa



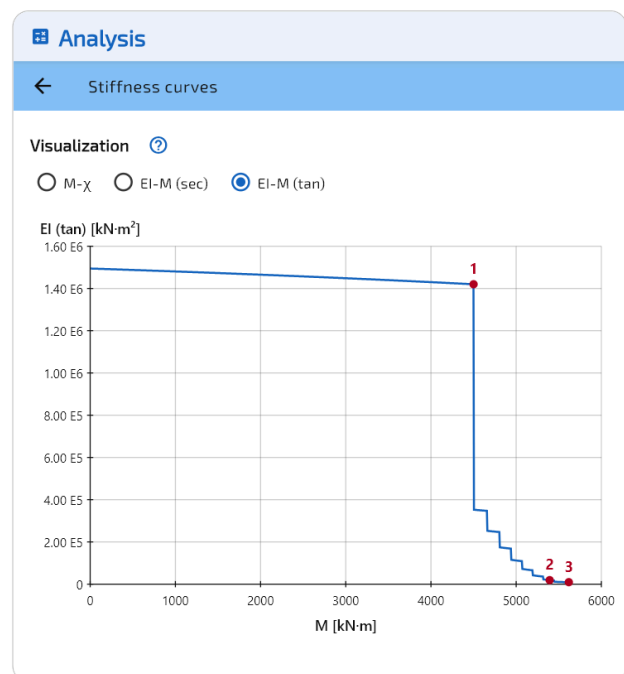
Rysunek 1: Przekrój prostokątny.

Krzywą wyznaczono przy czystym zginaniu: składowa swobodna to M_z (krzywizna χ_z), przy $N = 0$ i $M_y = 0$. Stan graniczny: SGN Podstawowy ($\gamma_c = 1{, }50$, $\gamma_s = 1{, }15$). Krzywizna rośnie od zera do zniszczenia; na każdym kroku obliczany jest moment i sztywność.

Krzywa $M_z-\chi$ i sztywność styczna



Rysunek 2: Wykres moment-krzywizna.

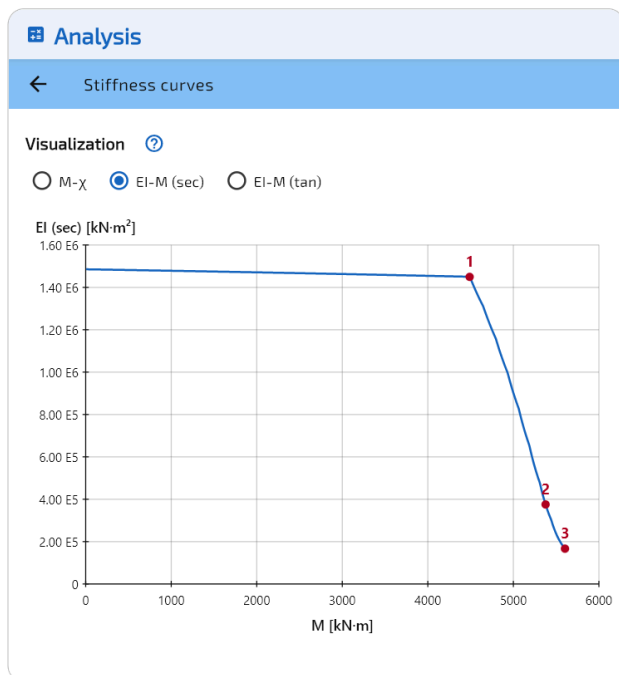


Rysunek 3: Sztywność styczna EI_{tan} .

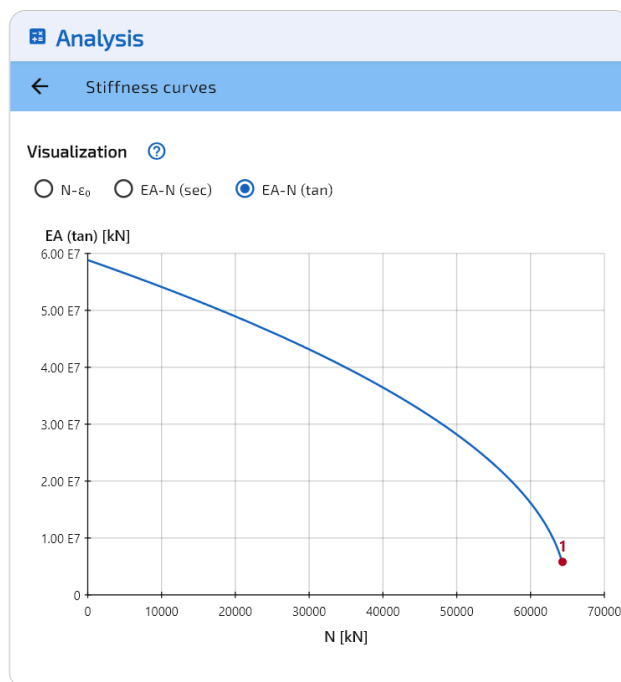
Krzywa $M-\chi$ ma klasyczny kształt: stroma gałąź początkowa z wysokimi modułami stycznymi, kolano przy zdarzeniu #1 (uplastycznienie stali) i długa półka plastyczna z niewielkim przyrostem momentu. Moment graniczny jest zaledwie 25% wyższy od momentu uplastycznienia, lecz krzywizna wzrosła dziesięciokrotnie.

Sztywność styczna jest quasi-stała w zakresie sprężystym, po czym gwałtownie spada przy zdarzeniu #1. Spadek jest nagły, gdyż wszystkie pręty dolnej warstwy mają tę samą współrzędną y i plastycyzują jednocześnie; to główne zbrojenie zginające, więc utrata sztywności jest natychmiastowa (EI_{\tan} dzielone przez 4). Przy prętach rozłożonych na różnych głębokościach uplastycznienie jest stopniowe, a krzywa styczna ma wzorec schodkowy. Po zdarzeniu #2 EI_{\tan} spada do wartości bliskiej zeru, co odpowiada niemal płaskiej półce na krzywej $M-\chi$.

Sztywność sieczna EI_{sec} i sztywność osiowa EA



Rysunek 4: Sztywność sieczna EI_{sec} .



Rysunek 5: Sztywność osiowa EA .

Sztywność sieczna jest niemal stała w zakresie sprężystym. Spadek zaczyna się przy zdarzeniu #1 (uplastycznienie stali) — redukcja zaledwie 2%. Stromy spadek następuje między zdarzeniami #1 i #2, gdy stal plastycyzuje, a beton wchodzi na półkę plastyczną. Przy zniszczeniu pozostaje ok. 11% sztywności początkowej.

Sztywność osiowa EA maleje prostszym wzorcem: spada wraz z modułem stycznym prawa parabola-prostokąt betonu przy rosnącym ściskaniu. Krzywa kończy się przy granicznym odkształceniu ściskającym betonu.

Zdarzenia sztywności ($M-\chi$)

Solver wykrywa trzy zdarzenia na krzywej $M-\chi$ dla tego przekroju:

#	Materiał	$\varepsilon_c / \varepsilon_s$ (%)	χ_z (%)	M_z (kN·m)	EI_{sec} (kN·m ²)	EI_{tan} (kN·m ²)
1	Stal	2.174	3.084	4 500	1.459E6	1.420E6
2	Beton	-2.000	14.764	5 393	3.653E5	1.897E4
3	Beton	-3.500	34.576	5 618	1.625E5	9.451E3

Zdarzenie #1: uplastycznienie stali ($\varepsilon_s = f_{yd}/E_s = 434\{, \}8/200\ 000 = 2\{, \}174\%$). Zdarzenie #2: beton osiąga półkę plastyczną $\varepsilon_{c2} = 2\{, \}000\%$. Zdarzenie #3: zmiążdżenie betonu przy $\varepsilon_{cu2} = 3\{, \}500\%$ — koniec krzywej.

Podłużny przekrój drażony (BAEL 91)

Dane wejściowe

Beton

- Podłużny przekrój drażony
- Szerokość całkowita = 4{,}00 m, Wysokość = 2{,}00 m
- Szerokość prostokątna = 2{,}00 m, Grubość = 0{,}30 m

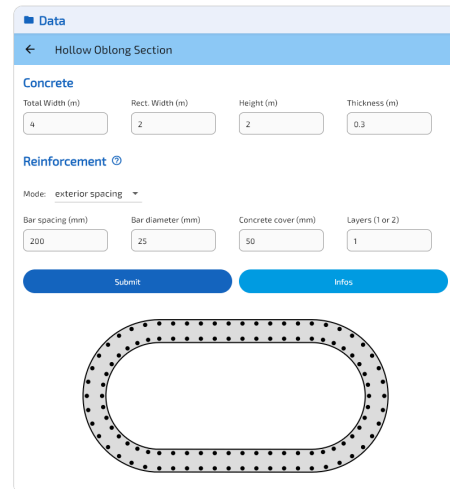
Zbrojenie

- 108 prętów, rozstaw zewnętrzny 200 mm
- Średnica $\varphi = 25$ mm, otulina 50 mm
- Stopień zbrojenia $\rho = 1{,}89\%$

Zależności materiałowe (BAEL 91)

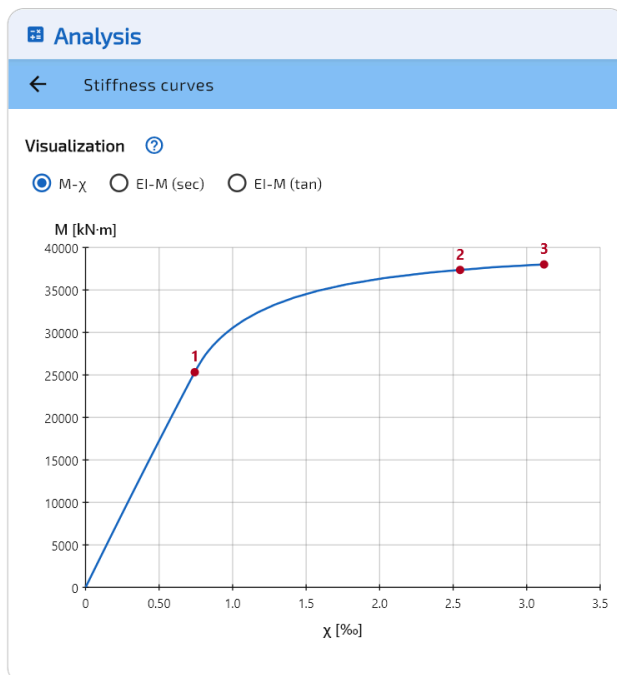
- Beton: $f_{c28} = 40$ MPa, $\theta = 0{,}85$
- Stal: $f_e = 500$ MPa, zarysowanie P

Krzywą wyznaczono przy czystym zginaniu względem osi silnej: składowa swobodna to $M_y(\chi_y)$, przy $N = 0$ i $M_z = 0$. Stan graniczny: SGN Trwały i Przejściowy. Przekrój typowy dla pomostów mostowych; duża bezwładność daje wysokie początkowe EI , a rdzeń drażony wzmacnia spadek sztywności po zarysowaniu.

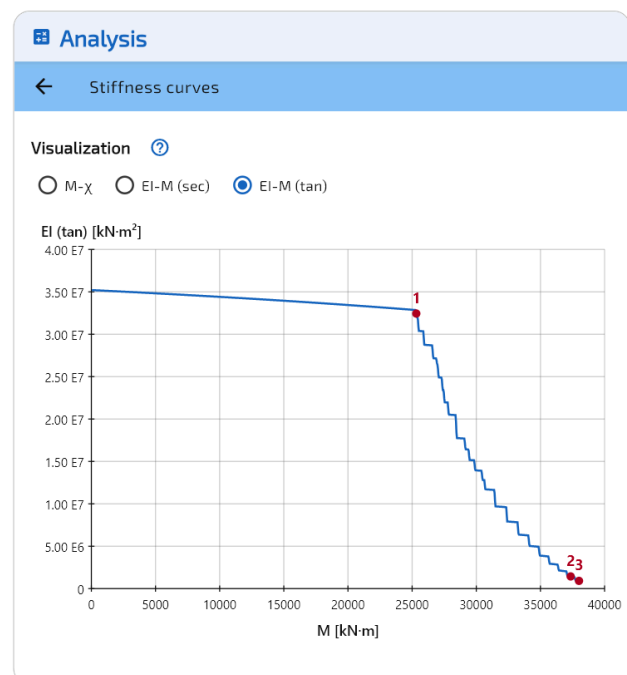


Rysunek 6: Podłużny przekrój drażony.

Krzywa $M_y-\chi$ i sztywność styczna



Rysunek 7: Wykres moment-krzywizna.



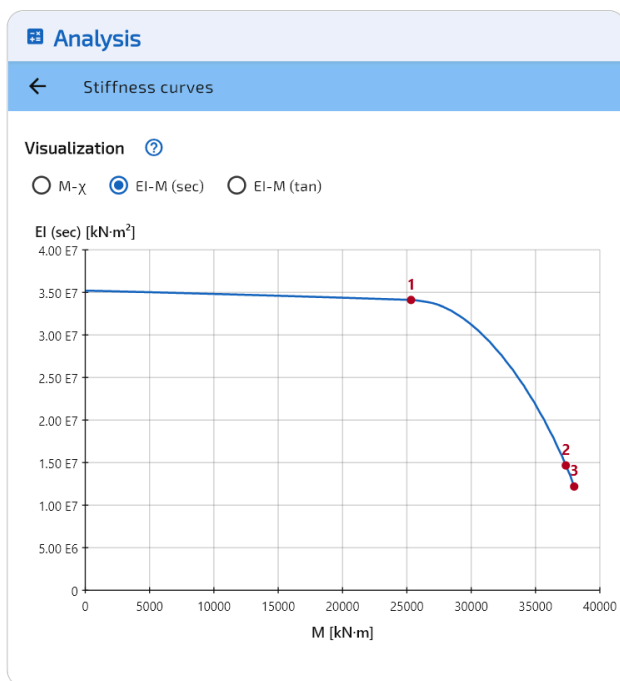
Rysunek 8: Sztywność styczna EI_{tan} .

Krzywa $M-\chi$ pokazuje, że degradacja sztywności zaczyna się przy zdarzeniu #1 (uplastycznienie stali). Moment graniczny jest 50% wyższy od momentu uplastycznienia. Tu krzywa kończy się zerwa-

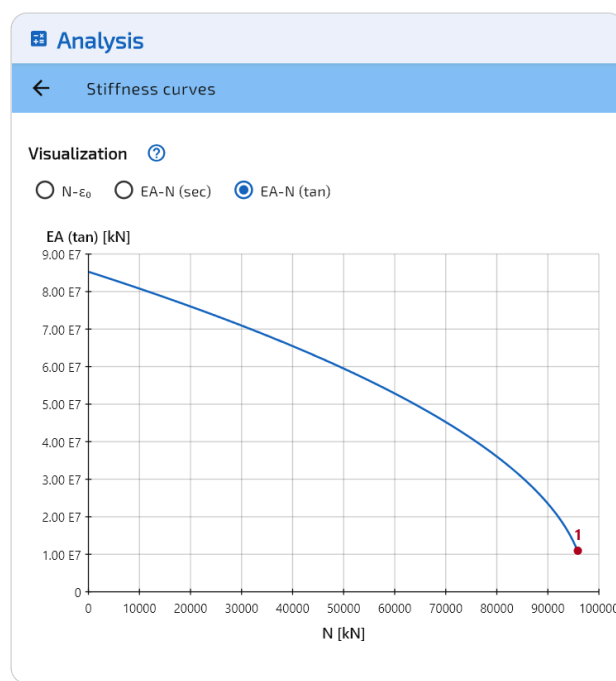
niem stali (zdarzenie #3), nie zmiążdżeniem betonu — inny mechanizm zniszczenia niż w przekroju prostokątnym, gdzie osiągnięto ε_{cu2} . Nie wszystkie zdarzenia występują we wszystkich przekrojach: mechanizm zależy od geometrii, zbrojenia i praw materiałowych.

Sztywność styczna jest quasi-stała w zakresie sprężystym. Spadek zaczyna się przy zdarzeniu #1, a wzorec schodkowy (wyraźniejszy niż w przekroju prostokątnym) wynika ze stopniowego uplastycznienia prętów na obwodzie. Po zdarzeniu #2 EI_{tan} dalej spada, osiągając przy zniszczeniu wartość o dwa rzędy wielkości niższą.

Sztywność sieczna EI_{sec} i sztywność osiowa EA



Rysunek 9: Sztywność sieczna EI_{sec} .



Rysunek 10: Sztywność osiowa EA .

Sztywność sieczna degraduje stopniowo: zaledwie 3% spadku przy zdarzeniu #1. Krzywa stromiej opada po zdarzeniu #2 (półka plastyczna betonu); przy zniszczeniu pozostaje ok. 35% sztywności początkowej. Mniejszy spadek względny niż w przekroju prostokątnym (65% vs 89%) jest typowy dla przekrojów drążonych o wysokim stopniu zbrojenia.

Zdarzenia sztywności ($M-\chi$)

#	Materiał	$\varepsilon_c / \varepsilon_s$ (‰)	χ_y (‰)	M_y (kN·m)	EI_{sec} (kN·m ²)	EI_{tan} (kN·m ²)
1	Stal	2.174	0.742	25 324	3.411E7	3.244E7
2	Beton	-2.000	2.547	37 356	1.466E7	1.439E6
3	Stal	10.000	3.119	38 006	1.219E7	9.154E5

Zdarzenie #1: uplastycznienie stali ($\varepsilon_s = 2\{, \}174$ ‰). Zdarzenie #2: beton osiąga półkę plastyczną ($\varepsilon_{c2} = 2\{, \}000$ ‰). Zdarzenie #3: zerwanie stali przy $\varepsilon_{ud} = 10\{, \}0$ ‰ (graniczne wydłużenie obliczeniowe wg BAEL) — koniec krzywej. W odróżnieniu od przekroju prostokątnego, gdzie zniszczenie wyznaczało zmiążdżenie betonu (ε_{cu2}), tu zniszczenie następuje przez zerwanie stali — różne zdarzenia aktywują się zależnie od geometrii i zbrojenia.

Test wydajności

Punkty dyskretyzacji	Prostokątny EC2 (ms)	Podłużny BAEL (ms)	drażony
100	5.2		6.5
500	15.5		11.3
1 000 (domyślnie)	17.3		19.5
5 000	61.0		60.9

Obliczenie jest praktycznie natychmiastowe niezależnie od liczby punktów: nawet przy 5 000 punktów oba przekroje kończą w mniej niż 61 ms.

Eksport

SectionPro eksportuje krzywe w formatach PDF, TXT i XLS. Eksport PDF zawiera też wizualizacje krzywych.

STIFFNESS CURVES CALCULATION RESULTS

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-04-02 19:39

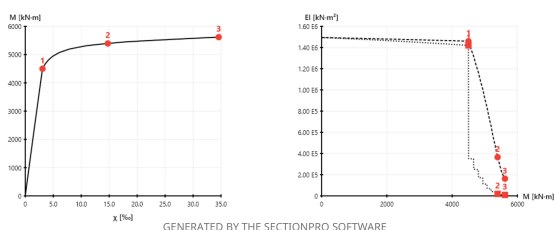
Events

Events correspond to special situations during the gradual construction of the stiffness curve where a material (concrete or steel) reaches an elastic or plastic deformation:

Param	Units	#1	#2	#3
Material		Steel	Concrete	Concrete
ec / es	‰	2.174	-2.000	-3.500
yz	‰	3.084	14.764	34.576
Mz	kN-m	4499.9	5393.2	5618.1
EI (sec)	kN-m ²	1.459 E6	3.653 E5	1.625 E5
EI (tan)	kN-m ²	1.420 E6	1.897 E4	9.451 E3

Visualization

Below are the stiffness curves and associated events



Rysunek 11: Eksport PDF, przekrój prostokątny.

STIFFNESS CURVES CALCULATION RESULTS

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-03-31 21:03

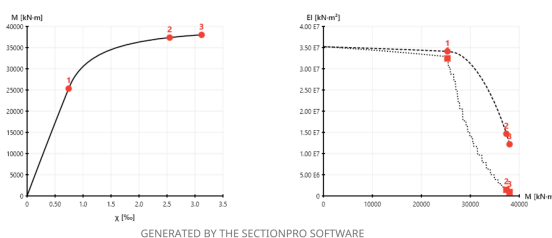
Events

Events correspond to special situations during the gradual construction of the stiffness curve where a material (concrete or steel) reaches an elastic or plastic deformation:

Param	Units	#1	#2	#3
Material		Steel	Concrete	Steel
ec / es	‰	2.174	-2.000	10.000
xy	‰	0.742	2.547	3.119
My	kN-m	25324.0	37355.6	38006.3
EI (sec)	kN-m ²	3.411 E7	1.466 E7	1.219 E7
EI (tan)	kN-m ²	3.244 E7	1.439 E6	9.154 E5

Visualization

Below are the stiffness curves and associated events



Rysunek 12: Eksport PDF, przekrój podłużny drażony.

Podsumowanie

Moduł krzywych sztywności podaje rzeczywistą ewolucję sztywności giętej i osiowej w funkcji obciążenia. Zwiększając składową siłową od zera do zniszczenia, rejestruje pełną ścieżkę degradacji — od odpowiedzi sprężystej, przez uplastycznienie, po zerwanie — z krzywiznami i odkształceniami osiowymi na każdym poziomie.

Sztywności EI_{sec} , EI_{tan} i EA dają inżynierom rzeczywiste wartości do modeli obliczeniowych, zastępując założenie stałego EI . Automatycznie wykrywane zdarzenia identyfikują kluczowe przejścia na prawach materiałowych (sprężystość-plastyczność, półka, zerwanie) z odpowiadającymi poziomami sił i sztywnościami.