

Stijfheidscurven

SectionPro Handleiding: moment-krommingsdiagrammen
en buigstijfheidsdegradatie onder toenemende belasting

BridgeKernel · 2026

Inleiding

Gewapend beton is geen lineair materiaal: de buigstijfheid EI hangt af van het belastingsniveau. Bij lage belasting blijven alle materialen in het elastische (staal) of initieel tangentele (beton) bereik, zodat EI hoog is. Bij toenemende belasting komt het beton in de dalende tak van zijn paraboool-rechthoekwet en bereikt het staal zijn vloeiplateau, waardoor EI daalt. Deze degradatie is relevant voor realistische vervormingen, maar ook breder in de constructieve analyse wanneer interne krachten afhangen van de stijfheidsverdeling, zoals bij statisch onbepaalde constructies, tweede-orde-analyse en herverdeling.

SectionPro traceert de volledige doorsnederesponse door twee krachtcomponenten vast te houden en de derde (N , M_z of M_y) van nul tot bezwijken te laten toenemen. Bij elke stap wordt iteratief evenwicht opgelost om de rektoestand te vinden. Deze aanpak behandelt ook tweessige buiging: door N te variëren verschuift de $M-\chi$ curve, waarbij druk verstijft en trek verzacht. Drie curven worden geproduceerd: kracht-vervorming ($M-\chi$), secante stijfheid EI_{sec} en tangent stijfheid EI_{tan} . De secante stijfheid (helling oorsprong-huidig punt) is de gemiddelde stijfheid langs het belastingspad, veelgebruikt in iteratieve EEM-analyse. De tangent stijfheid (momentane helling) geeft de exacte stijfheid bij een gegeven belasting, gebruikt in niet-lineaire analyse waar de stijfheidsmatrix per stap wordt bijgewerkt.

De oplosser detecteert ook *stijfheidsgebeurtenissen*: overgangen op de materiaalwetten van elastisch naar plastisch, en breuk. Voor staal kunnen deze bij trek en druk optreden; voor beton bij druk (plateau bij ε_{c2} en breuk bij ε_{cu2}). Per gebeurtenis worden deelnemer, rekdrempel, krachtniveau en bijbehorende EI_{sec} en EI_{tan} gerapporteerd.

Berekende resultaten

Curven

$M-\chi$, $N-\varepsilon_0$
 EI_{sec} , EI_{tan} vs. belasting
 EA_{sec} , EA_{tan} vs. belasting

Gebeurtenisstablel

Deelnemer: beton / staal
Kritische rekdrempel
Kracht, EI of EA bij gebeurtenis
Vloeien, plastisch plateau, beton-
drukbreuk

Exports

PDF: stijfheidscurven + gebeurte-
nissentablel
XLS / TXT: volledig belastings-
pad + gebeurtenissen

Rechthoekige doorsnede (Eurocode 2)

Invoergegevens

Beton

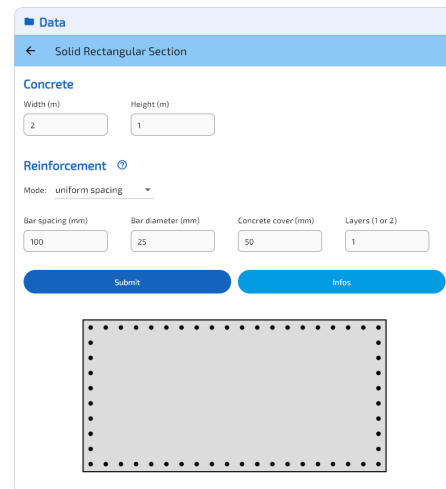
- Massieve rechthoekige doorsnede
- Breedte = 2.00 m, Hoogte = 1.00 m

Wapening

- 56 staven, uniforme tussenafstand 100 mm
- Diameter $\varphi = 25$ mm, betondekking 50 mm
- Wapeningspercentage $\rho = 1.37\%$

Materiaalwetten (EC2)

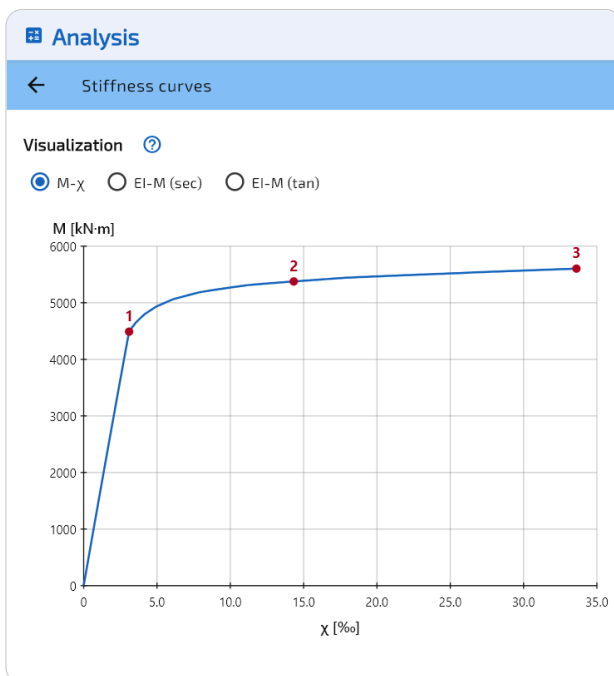
- Beton C40/50: $f_{ck} = 40$ MPa
- Staal B500B: $f_{yk} = 500$ MPa



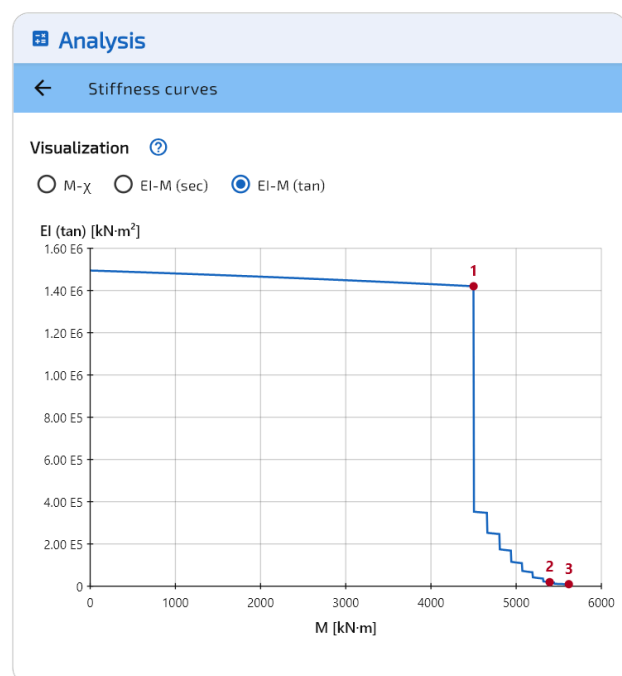
Figuur 1: Rechthoekige doorsnede.

De stijfheidscurve wordt berekend onder zuivere buiging; vrije component M_z (kromming χ_z), met $N = 0$ en $M_y = 0$ vast. Grenstoestand: UGT Fundamenteel ($\gamma_c = 1.50$, $\gamma_s = 1.15$). De kromming loopt van nul tot bezwijken; per stap worden moment en stijfheid berekend.

M_z - χ curve en tangent stijfheid



Figuur 2: Moment-krommingsdiagram.

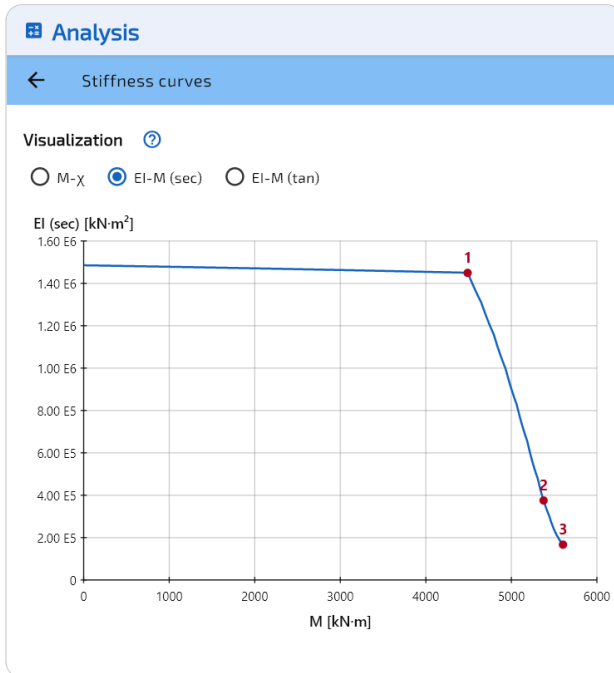


Figuur 3: Tangent stijfheid EI_{tan} .

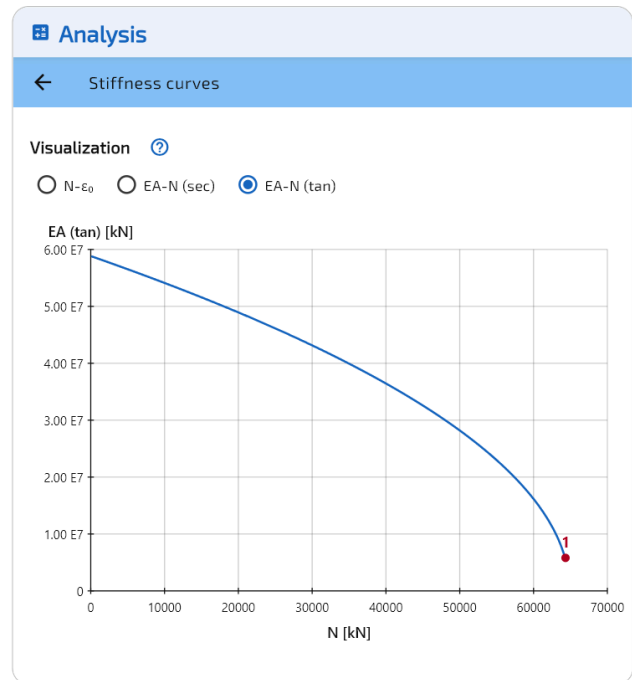
De M - χ curve vertoont de klassieke vorm: een steile initiële tak met hoge tangentmoduli, een knik bij gebeurtenis #1 (staal vloeit), en een lang plastisch plateau waar extra kromming weinig extra moment oplevert. Het uiterste moment ligt slechts 25% boven het vloeimomnet, maar de kromming is tienvoudig toegenomen.

De tangent stijfheid blijft quasi-constant in het elastische bereik en daalt scherp bij gebeurtenis #1. De daling is abrupt omdat alle staven in de onderste laag dezelfde y -coördinaat delen en gelijktijdig vloeien; dit is de hoofdwapening, dus het stijfheidsverlies werkt onmiddellijk door (EI_{\tan} gedeeld door 4 bij deze ene gebeurtenis). Bij staven op verschillende hoogtes verloopt het vloeien progressief en toont de tangentcurve een trappatroon. Voorbij gebeurtenis #2 daalt EI_{\tan} tot bijna nul, overeenkomend met het vlakke plastische plateau op de $M-\chi$ curve.

Secante stijfheid EI_{sec} en axiale stijfheid EA



Figuur 4: Secante stijfheid EI_{sec} .



Figuur 5: Axiale stijfheid EA .

De secante stijfheid blijft vrijwel constant in het elastische bereik. De daling begint bij gebeurtenis #1 (staal vloeit), met slechts 2% reductie. De steile daling treedt op tussen #1 en #2, terwijl het staal vloeit en het beton zijn plateau bereikt. Bij bezwijken resteert circa 11% van de initiële stijfheid.

De axiale stijfheid EA volgt een eenvoudiger patroon: zij daalt met de tangentmodulus van de parabool-rechthoekwet bij toenemende drukrek. De curve eindigt wanneer de uiterste drukrek van het beton bereikt wordt.

Stijfheidsgebeurtenissen ($M-\chi$)

De oplosser detecteert drie gebeurtenissen langs de $M-\chi$ curve:

#	Materiaal	$\varepsilon_c / \varepsilon_s$ (%)	χ_z (%)	M_z (kN·m)	EI_{sec} (kN·m²)	EI_{tan} (kN·m²)
1	Staal	2.174	3.084	4 500	1.459E6	1.420E6
2	Beton	-2.000	14.764	5 393	3.653E5	1.897E4
3	Beton	-3.500	34.576	5 618	1.625E5	9.451E3

Gebeurtenis #1 is staal vloeien ($\varepsilon_s = f_{yd}/E_s = 434.8/200\,000 = 2.174\%$). Gebeurtenis #2 markeert het plastische plateau van het beton bij $\varepsilon_{c2} = 2.000\%$. Gebeurtenis #3 is betondrukbreuk bij $\varepsilon_{cu2} = 3.500\%$, waarmee de curve eindigt.

Holle langwerpige doorsnede (BAEL 91)

Invoergegevens

Beton

- Holle langwerpige doorsnede
- Totale breedte = 4.00 m, Hoogte = 2.00 m
- Rechthoekige breedte = 2.00 m, Dikte = 0.30 m

Wapening

- 108 staven, uitwendige tussenafstand 200 mm
- Diameter $\varphi = 25$ mm, betondekking 50 mm
- Wapeningspercentage $\rho = 1.89\%$

Materiaalwetten (BAEL 91)

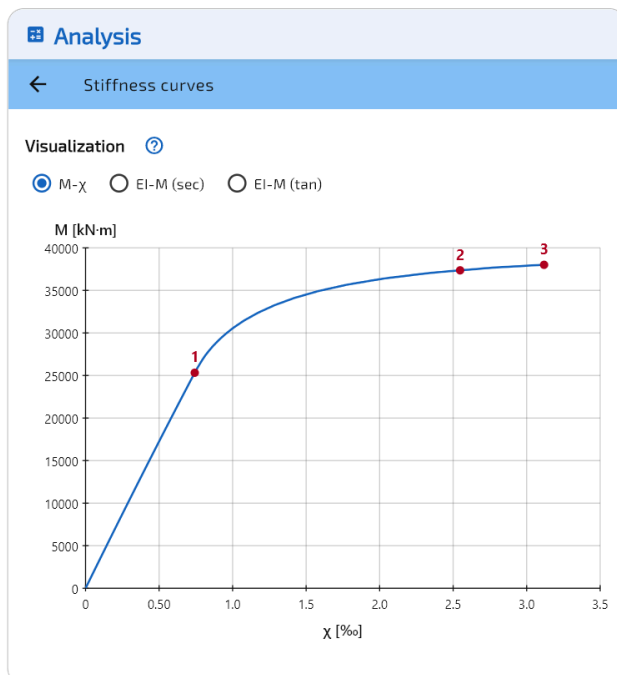
- Beton: $f_{c28} = 40$ MPa, $\theta = 0.85$
- Staal: $f_e = 500$ MPa, scheurvorming P

De stijfheidscurve wordt berekend onder zuivere buiging om de sterke as: vrije component M_y (kromming χ_y), met $N = 0$ en $M_z = 0$ vast. Grenstoestand: UGT Blijvend & Tijdelijk. Deze doorsnede is typerend voor brugdekken; de grote traagheid geeft een hoge initiële EI en de holle kern versterkt de stijfheidsdaling na scheurvorming.

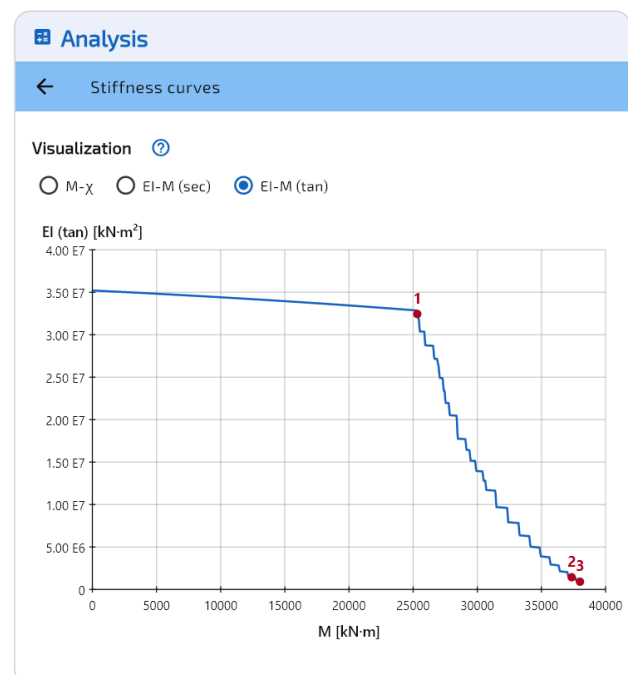
M_y - χ curve en tangent stijfheid

The screenshot shows a software interface for defining a 'Hollow Oblong Section'. The 'Concrete' section has input fields for Total Width (4), Rect. Width (2), Height (2), and Thickness (0.3). The 'Reinforcement' section has a dropdown for Mode (set to 'exterior spacing'), and input fields for Bar spacing (200), Bar diameter (25), Concrete cover (50), and Layers (1). Below the form is a diagram of the hollow oblong section with reinforcement bars.

Figuur 6: Holle langwerpige doorsnede.



Figuur 7: Moment-krommingsdiagram.



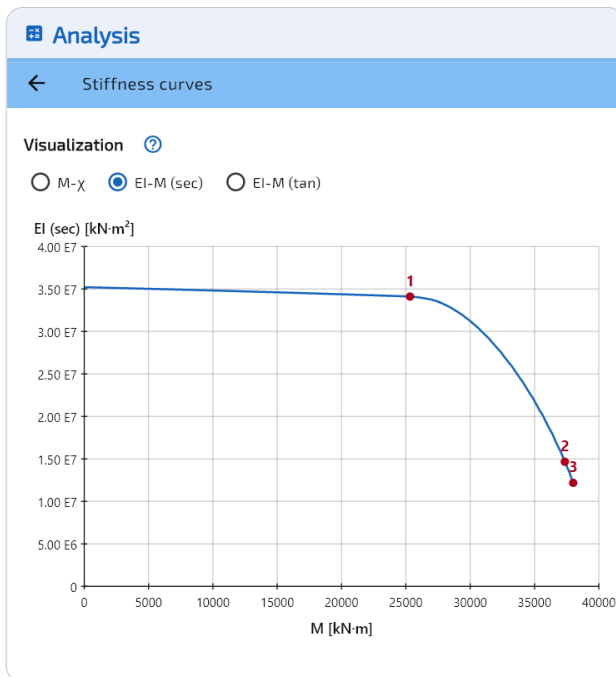
Figuur 8: Tangent stijfheid EI_{tan} .

De M - χ curve toont dat de degradatie begint bij gebeurtenis #1 (staal vloeit). Het uiterste moment ligt 50% boven het vloeimomnet. Hier eindigt de curve door staalbreuk (#3) in plaats van betondrukbreuk. Dit is een ander bezwijkmechanisme dan bij de rechthoekige doorsnede, waar ε_{cu2} eerst

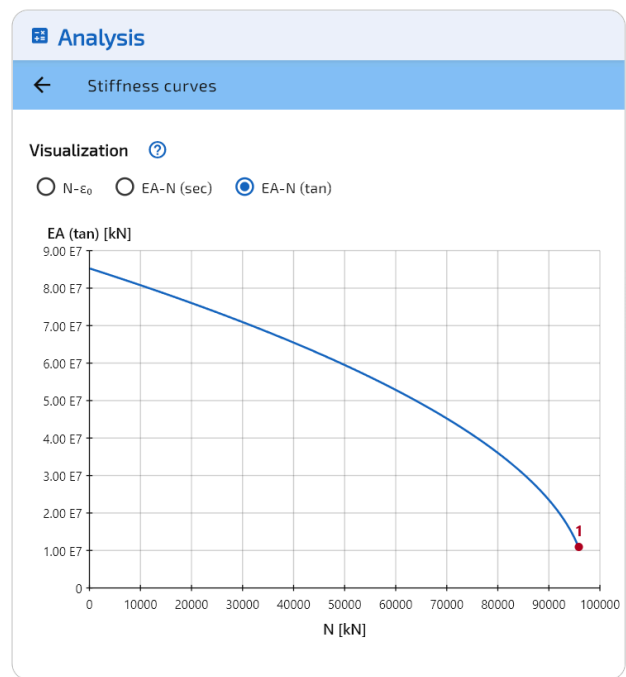
bereikt werd. Niet alle gebeurtenissen treden op voor elke doorsnede: het bezwijkmechanisme hangt af van geometrie, wapeningsindeling en materiaalwetten.

De tangent stijfheid blijft quasi-constant in het elastische bereik. De daling begint bij #1, en het trappatroon (duidelijker dan bij de rechthoekige doorsnede) weerspiegelt het progressief vloeien van individuele staven rond de omtrek. Na #2 blijft EI_{\tan} dalen tot twee ordes van grootte onder de initiële waarde bij bezwijken.

Secante stijfheid EI_{sec} en axiale stijfheid EA



Figuur 9: Secante stijfheid EI_{sec} .



Figuur 10: Axiale stijfheid EA .

De secante stijfheid degradeert geleidelijk: slechts 3% daling bij #1 (staal vloeit). De curve wordt steiler na #2 (plastisch plateau beton), en bij bezwijken resteert circa 35% van de initiële stijfheid. De kleinere relatieve daling t.o.v. de rechthoekige doorsnede (65% vs. 89%) is typerend voor holle doorsneden met hoog wapeningspercentage.

Stijfheidsgebeurtenissen ($M-\chi$)

#	Materiaal	$\varepsilon_c / \varepsilon_s$ (‰)	χ_y (‰)	M_y (kN·m)	EI_{sec} (kN·m ²)	EI_{tan} (kN·m ²)
1	Staal	2.174	0.742	25 324	3.411E7	3.244E7
2	Beton	-2.000	2.547	37 356	1.466E7	1.439E6
3	Staal	10.000	3.119	38 006	1.219E7	9.154E5

Gebeurtenis #1 is staal vloeien ($\varepsilon_s = 2.174\%$). Gebeurtenis #2 markeert het plastische plateau van het beton ($\varepsilon_{c2} = 2.000\%$). Gebeurtenis #3 is staalbreuk bij $\varepsilon_{ud} = 10.0\%$ (rekenwaarde uiterste rek volgens BAEL), waarmee de curve eindigt. Anders dan de rechthoekige doorsnede waar betondrukbreuk (ε_{cu2}) maatgevend was, bezwijkt deze doorsnede door staalbreuk – verschillende gebeurtenissen treden op afhankelijk van geometrie en wapeningsindeling.

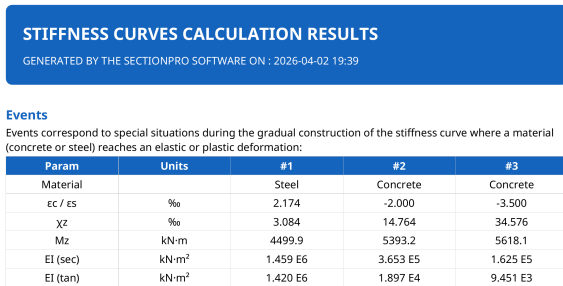
Prestatiebenchmark

Discretisatiepunten	Rechthoekig EC2 (ms)	Langwerpig (ms)	BAEL
100	5.2	6.5	
500	15.5	11.3	
1 000 (standaard)	17.3	19.5	
5 000	61.0	60.9	

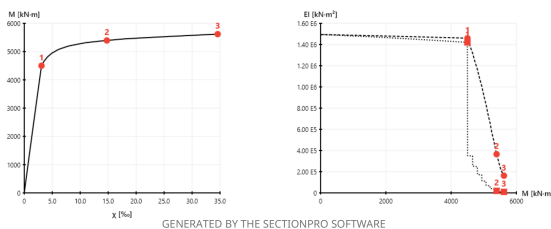
De berekening is vrijwel instantaan ongeacht het aantal discretisatiepunten: zelfs bij 5 000 punten zijn beide doorsneden in minder dan 61 ms voltooid.

Export

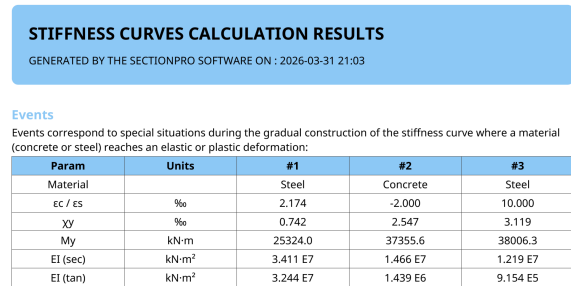
SectionPro exporteert curvewaarden in PDF, TXT en XLS voor hergebruik in externe programma's. De PDF-export bevat ook visualisaties van de curven.



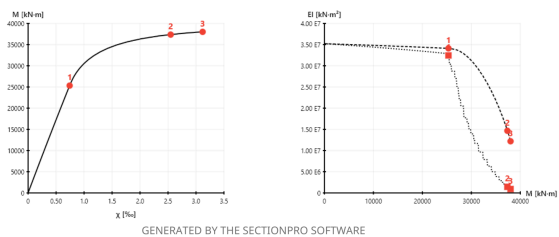
Visualization
Below are the stiffness curves and associated events



Figuur 11: PDF-export, rechthoekige doorsnede.



Visualization
Below are the stiffness curves and associated events



Figuur 12: PDF-export, langwerpige doorsnede.

Conclusie

De stijfheidscurvemodule geeft de werkelijke evolutie van buig- en axiale stijfheid als functie van de belasting. Door een krachtcomponent van nul tot bezwijken te doorlopen, wordt het volledige degradatiepad vastgelegd – van elastische respons via progressief vloeien tot breuk – met krommingen en axiale rekken per belastingsniveau.

De secante en tangent stijfheden (EI_{sec} , EI_{tan} , EA) geven ingenieurs de werkelijke stijfheidswaarden ter vervanging van de aanname van constante EI . De automatisch gedetecteerde stijfheidsgebeurtenissen identificeren de overgangen op de materiaalwetten (elastisch-naar-plastisch, plateau en breuk) met bijbehorende krachtniveaus en stijfheidswaarden.