



Curve di Rigidezza

Tutorial SectionPro: diagrammi momento-curvatura
e degradazione della rigidezza flessionale sotto carico crescente

BridgeKernel · 2026

Introduzione

Il calcestruzzo armato non è lineare: la rigidezza flessionale EI dipende dal carico. A bassi carichi, i materiali restano in campo elastico (acciaio) o tangente iniziale (calcestruzzo), e EI è elevata. All'aumentare del carico, il calcestruzzo entra nel ramo discendente della legge parabola-rettangolo e l'acciaio raggiunge il plateau di snervamento, riducendo EI . Questa degradazione conta per la stima degli spostamenti reali, ma anche nell'analisi strutturale quando le sollecitazioni dipendono dalla distribuzione delle rigidezze: strutture iperstatiche, analisi al secondo ordine, ridistribuzione.

SectionPro traccia la risposta completa fissando due componenti di forza e incrementando la terza (N , M_z o M_y) da zero a rottura. Ad ogni passo si risolve un equilibrio iterativo per trovare lo stato di deformazione. L'approccio gestisce anche la flessione biassiale: variando N fisso, si osserva come la curva $M-\chi$ si sposta – la compressione irrigidisce, la trazione ammorbidisce. Si producono tre curve: forza-deformazione ($M-\chi$), rigidezza secante EI_{sec} e tangente EI_{tan} . La secante (pendenza origine-punto corrente) e la rigidezza media sul percorso di carico, usata nell'analisi FEM iterativa. La tangente (pendenza istantanea) dà la rigidezza esatta per un dato stato di carico, usata nell'analisi non lineare con aggiornamento della matrice ad ogni passo.

Il solutore rileva gli *eventi di rigidezza*, ossia le transizioni chiave sulle leggi costitutive: elasticità-plasticità e rottura. Per l'acciaio, eventi in trazione e compressione; per il calcestruzzo, in compressione (plateau a ε_{c2} , schiacciamento a ε_{cu2}). Ogni evento è riportato con materiale, soglia di deformazione, livello di carico e corrispondenti EI_{sec} e EI_{tan} .

Risultati calcolati

Curve

$M-\chi$, $N-\varepsilon_0$
 EI_{sec} , EI_{tan} vs. carico
 EA_{sec} , EA_{tan} vs. carico

Tabella eventi

Materiale: calcestruzzo / acciaio
Soglia di deformazione critica
Forza, EI o EA all'evento
Snervamento, plateau plastico,
schiacciamento

Esportazioni

PDF: curve di rigidezza + tabella
eventi
XLS / TXT: percorso di carico
completo + eventi

Sezione rettangolare (Eurocodice 2)

Dati di input

Calcestruzzo

- Sezione trasversale rettangolare piena
- Larghezza = 2.00 m, Altezza = 1.00 m

Armatura

- 56 barre, passo uniforme 100 mm
- Diametro $\varphi = 25$ mm, copriferro 50 mm
- Percentuale di armatura $\rho = 1.37\%$

Leggi costitutive (EC2)

- Calcestruzzo C40/50: $f_{ck} = 40$ MPa
- Acciaio B500B: $f_{yk} = 500$ MPa

The screenshot shows a 'Data' window for a 'Solid Rectangular Section'. Under 'Concrete', the width is 2 m and height is 1 m. Under 'Reinforcement', the mode is 'uniform spacing', bar spacing is 100 mm, bar diameter is 25 mm, concrete cover is 50 mm, and there is 1 layer. A diagram at the bottom shows a rectangular cross-section with reinforcement bars.

Figura 1: Sezione trasversale rettangolare.

La curva è calcolata in flessione pura: componente libera M_z (curvatura χ_z), con $N = 0$ e $M_y = 0$ fissi. Stato limite SLU Fondamentale ($\gamma_c = 1.50$, $\gamma_s = 1.15$). La curvatura cresce da zero a rottura; ad ogni passo si calcolano momento e rigidezza.

Curva $M_z-\chi$ e rigidezza tangente

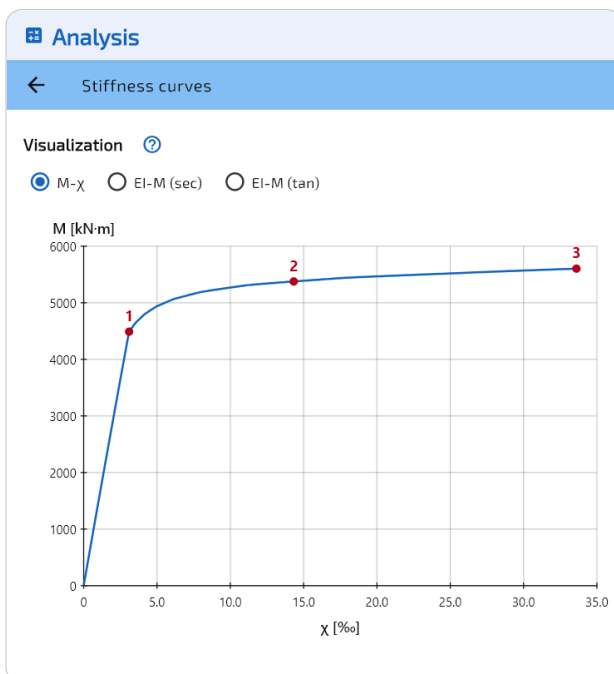


Figura 2: Diagramma momento-curvatura.

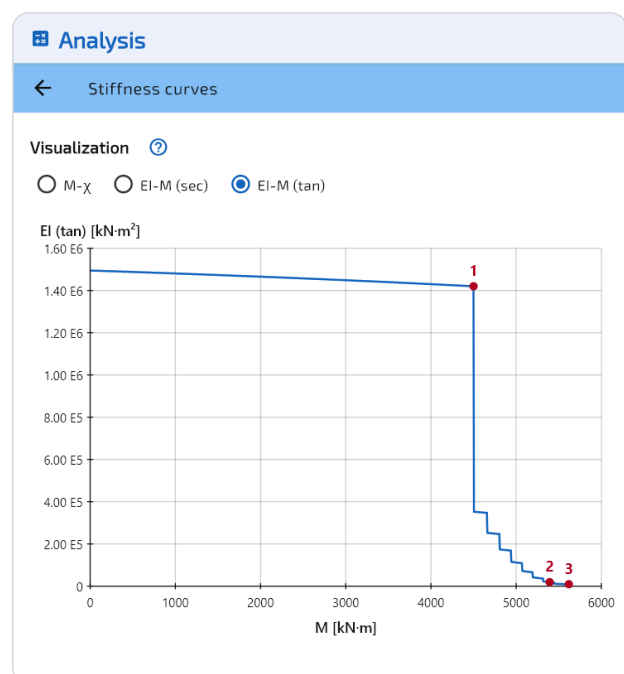


Figura 3: Rigidezza tangente EI_{tan} .

La curva $M-\chi$ ha la forma classica: ramo iniziale ripido con moduli tangenti elevati, ginocchio all'evento #1 (snervamento acciaio) e lungo plateau plastico dove ulteriore curvatura produce poco momento aggiuntivo. Il momento ultimo supera quello di snervamento del solo 25%, ma la curvatura è decuplicata.

La rigidezza tangente resta quasi costante in campo elastico, poi crolla all'evento #1. Il calo è brusco perché tutte le barre dello strato inferiore hanno la stessa coordinata y e snervano insieme; essendo l'armatura flessionale principale, la perdita di rigidità è immediata (EI_{\tan} diviso per 4 a questo evento). Con barre a profondità diverse, lo snervamento è progressivo e la curva mostra un andamento a gradini. Oltre l'evento #2, EI_{\tan} scende quasi a zero, riflettendo il plateau piatto della curva $M-\chi$.

Rigidezza secante EI_{sec} e rigidezza assiale EA

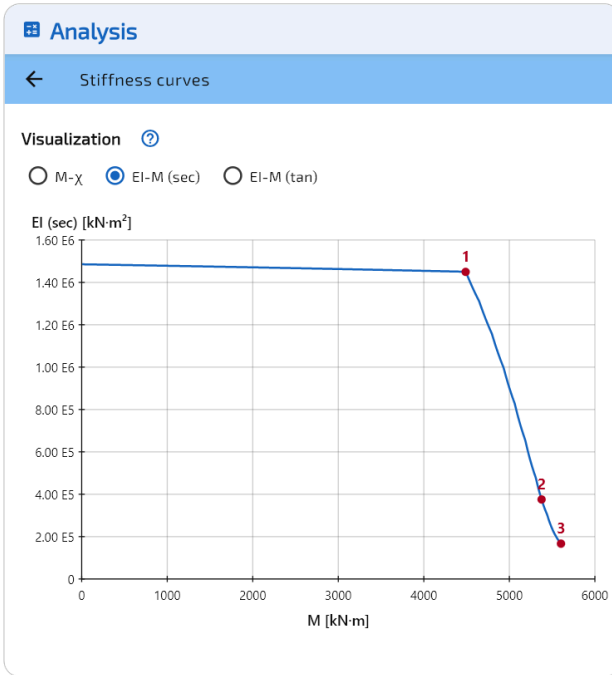


Figura 4: Rigidezza secante EI_{sec} .

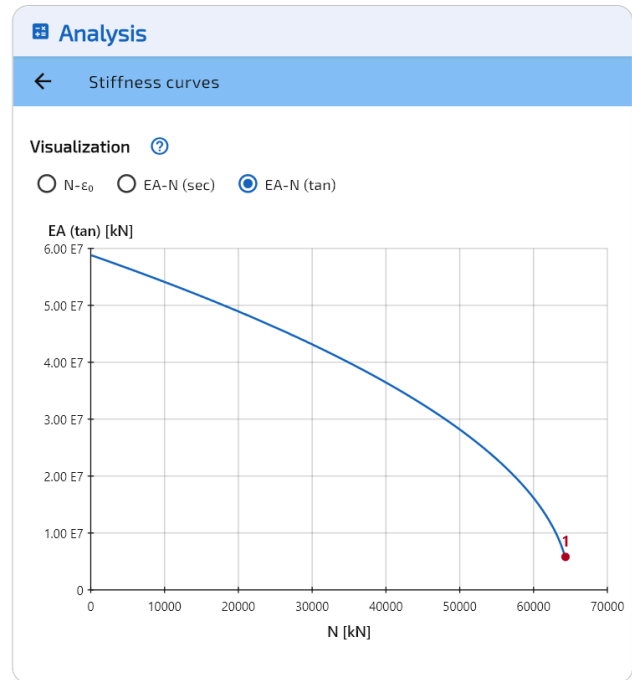


Figura 5: Rigidezza assiale EA .

La rigidezza secante resta quasi costante in campo elastico. Il calo inizia all'evento #1 (snervamento acciaio), con appena il 2% di riduzione. Il calo ripido avviene tra gli eventi #1 e #2, con snervamento dell'acciaio e plateau plastico del calcestruzzo. A rottura resta solo l'11% circa della rigidità iniziale.

La rigidezza assiale EA segue un andamento più semplice: cala al diminuire del modulo tangente della parabola-rettangolo con l'aumento della deformazione di compressione. La curva termina al raggiungimento della deformazione ultima del calcestruzzo.

Eventi di rigidezza ($M-\chi$)

Il solutore rileva tre eventi lungo la curva $M-\chi$:

#	Materiale	$\varepsilon_c / \varepsilon_s$ (‰)	χ_z (‰)	M_z (kN·m)	EI_{sec} (kN·m ²)	EI_{tan} (kN·m ²)
1	Acciaio	2.174	3.084	4 500	1.459E6	1.420E6
2	Calcestruzzo	-2.000	14.764	5 393	3.653E5	1.897E4
3	Calcestruzzo	-3.500	34.576	5 618	1.625E5	9.451E3

Evento #1: snervamento acciaio ($\varepsilon_s = f_{yd}/E_s = 434.8/200\,000 = 2.174\%$). Evento #2: plateau plastico del calcestruzzo $\varepsilon_{c2} = 2.000\%$. Evento #3: schiacciamento del calcestruzzo a $\varepsilon_{cu2} = 3.500\%$, che termina la curva.

Sezione oblungo cavo (BAEL 91)

Dati di input

Calcestruzzo

- Sezione trasversale oblungo cavo
- Larghezza totale = 4.00 m, Altezza = 2.00 m
- Larghezza rettangolare = 2.00 m, Spessore = 0.30 m

Armatura

- 108 barre, passo esterno 200 mm
- Diametro $\varphi = 25$ mm, copriferro 50 mm
- Percentuale di armatura $\rho = 1.89\%$

Leggi costitutive (BAEL 91)

- Calcestruzzo: $f_{c28} = 40$ MPa, $\theta = 0.85$
- Acciaio: $f_e = 500$ MPa, fessurazione P

La curva è calcolata in flessione pura sull'asse forte: componente libera M_y (curvatura χ_y), con $N = 0$ e $M_z = 0$ fissi. Stato limite SLU Persistente e Transitorio. Sezione tipica degli impalccati da ponte; la grande inerzia da un EI iniziale elevato e il nucleo cavo amplifica il calo di rigidezza dopo fessurazione.

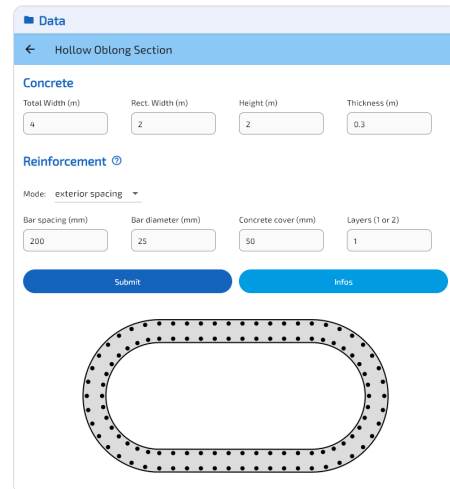


Figura 6: Sezione oblungo cavo.

Curva $M_y-\chi$ e rigidezza tangente

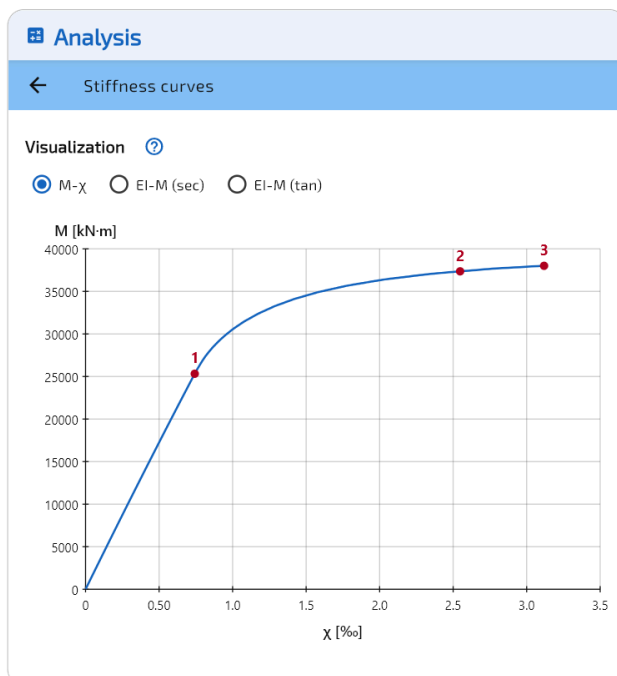


Figura 7: Diagramma momento-curvatura.

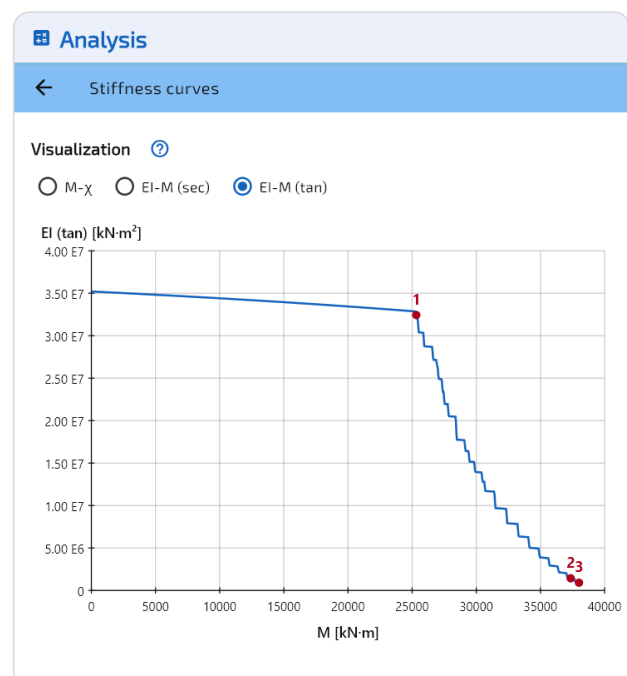


Figura 8: Rigidezza tangente EI_{tan} .

La curva $M-\chi$ mostra che la degradazione inizia all'evento #1 (snervamento acciaio). Il momento ultimo supera del 50% quello di snervamento. Qui la curva termina per rottura dell'acciaio (evento #3), non per schiacciamento del calcestruzzo. Modalità di rottura diversa dalla sezione rettangolare,

dove ε_{cu2} era raggiunto per primo. Non tutti gli eventi si verificano per ogni sezione: la modalità di rottura dipende da geometria, armatura e leggi costitutive.

La rigidezza tangente resta quasi costante in campo elastico. Il calo inizia all'evento #1; l'andamento a gradini (più marcato che nella sezione rettangolare) riflette lo snervamento progressivo delle barre lungo il perimetro. Dopo l'evento #2, EI_{tan} continua a calare, raggiungendo due ordini di grandezza sotto il valore iniziale a rottura.

Rigidezza secante EI_{sec} e rigidezza assiale EA

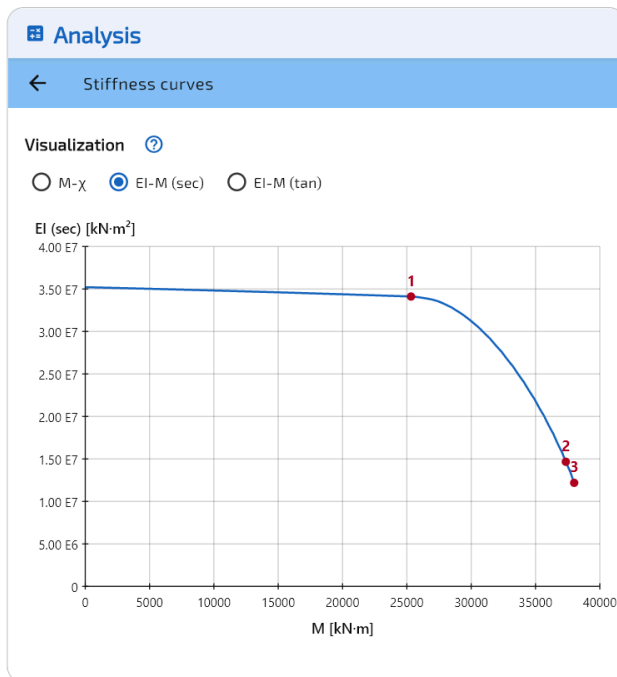


Figura 9: Rigidezza secante EI_{sec} .

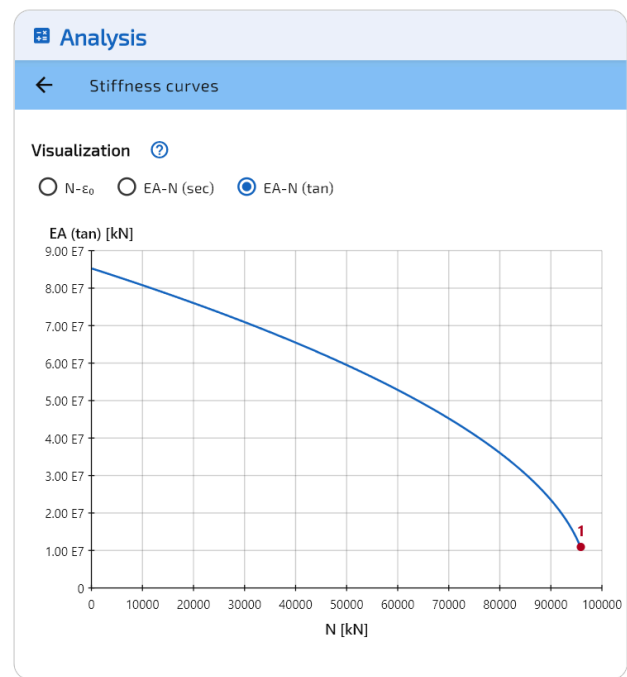


Figura 10: Rigidezza assiale EA .

La rigidezza secante si degrada gradualmente: solo -3% all'evento #1 (snervamento acciaio). La curva si fa più ripida dopo l'evento #2 (plateau plastico calcestruzzo); a rottura resta circa il 35% della rigidezza iniziale. Il calo relativo minore rispetto alla sezione rettangolare (65% vs 89%) è tipico delle sezioni cave con alto rapporto di armatura.

Eventi di rigidezza ($M-\chi$)

#	Materiale	$\varepsilon_c / \varepsilon_s$ (‰)	χ_y (‰)	M_y (kN·m)	EI_{sec} (kN·m ²)	EI_{tan} (kN·m ²)
1	Acciaio	2.174	0.742	25 324	3.411E7	3.244E7
2	Calcestruzzo	-2.000	2.547	37 356	1.466E7	1.439E6
3	Acciaio	10.000	3.119	38 006	1.219E7	9.154E5

Evento #1: snervamento acciaio ($\varepsilon_s = 2.174\%$). Evento #2: plateau plastico calcestruzzo ($\varepsilon_{c2} = 2.000\%$). Evento #3: rottura acciaio a $\varepsilon_{ud} = 10.0\%$ (allungamento ultimo di progetto BAEL), che termina la curva. A differenza della sezione rettangolare, dove la rottura era per schiacciamento (ε_{cu2}), qui la rottura avviene nell'acciaio: gli eventi attivati dipendono dalla geometria e dall'armatura.

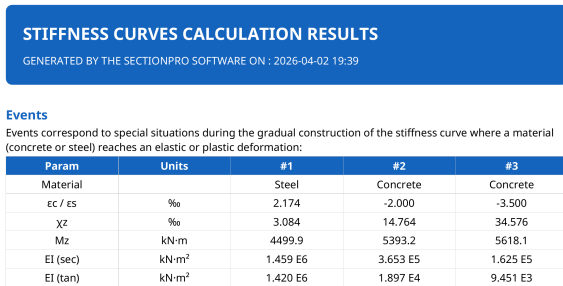
Benchmark prestazionale

Punti di discretizzazione	Rettangolare (ms)	EC2	Oblungo BAEL (ms)
100	5.2		6.5
500	15.5		11.3
1 000 (default)	17.3		19.5
5 000	61.0		60.9

Il calcolo è istantaneo indipendentemente dal numero di punti: anche a 5 000 punti, entrambe le sezioni terminano in meno di 61 ms.

Esportazione

SectionPro esporta i valori delle curve in PDF, TXT e XLS per il riutilizzo in strumenti esterni. L'export PDF include anche le visualizzazioni grafiche.



Visualization
Below are the stiffness curves and associated events

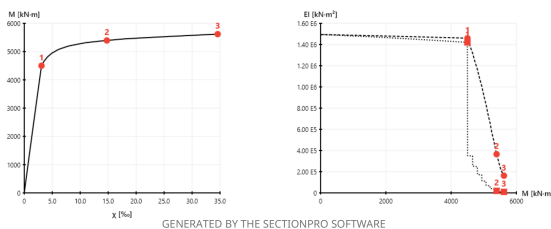
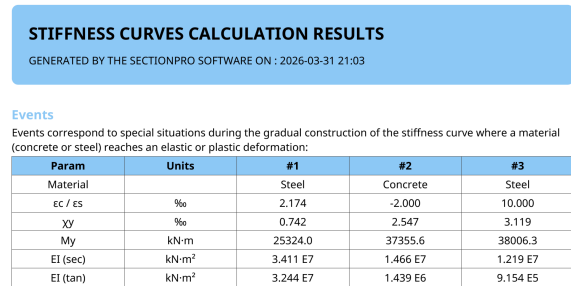


Figura 11: Esportazione PDF, sezione rettangolare.



Visualization
Below are the stiffness curves and associated events

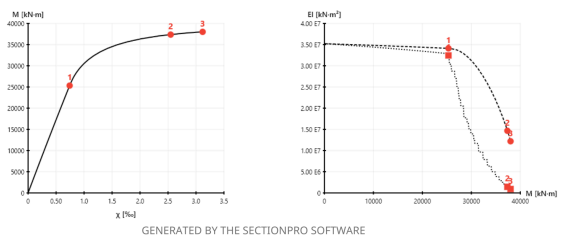


Figura 12: Esportazione PDF, sezione oblungo.

Conclusione

Il modulo fornisce l'evoluzione reale della rigidezza flessionale e assiale in funzione del carico. Incrementando una componente di forza da zero a rottura, cattura l'intero percorso di degradazione – dalla risposta elastica allo snervamento progressivo fino a rottura – e riporta curvature e deformazioni assiali ad ogni livello di carico.

Le rigidezze secante e tangente (EI_{sec} , EI_{tan} , EA) forniscono i valori effettivi da usare nei modelli strutturali, sostituendo l'ipotesi di EI costante. Gli eventi rilevati automaticamente identificano le transizioni chiave (elastico-plastico, plateau, rottura) con i relativi livelli di carico e valori di rigidezza.