

Courbes de rigidité

Tutoriel SectionPro : diagrammes moment-courbure
et dégradation de la rigidité flexionnelle sous chargement croissant

BridgeKernel · 2026

Introduction

Le béton armé n'est pas un matériau linéaire : sa rigidité flexionnelle EI dépend du niveau de charge. À faible charge, les matériaux restent dans leur domaine élastique (acier) ou tangent initial (béton), et EI est élevé. Sous charge croissante, le béton entre dans la branche descendante de sa loi parabole-rectangle et l'acier atteint son palier de plastification, provoquant une chute de EI . Cette dégradation importe pour l'estimation des déplacements, mais aussi en analyse structurale dès que les efforts internes dépendent de la distribution des rigidités : structures hyperstatiques, analyse au second ordre, redistribution.

SectionPro trace la réponse complète en fixant deux composantes d'effort et en incrémentant la troisième (N , M_z ou M_y) de zéro à la rupture. À chaque pas, un équilibre itératif détermine l'état de déformation. L'approche gère aussi la flexion biaxiale : en variant N fixé, on observe le décalage de la courbe $M-\chi$, la compression rigidifiant la réponse et la traction l'assouplissant. Trois courbes sont produites : effort-déformation ($M-\chi$), rigidité sécante EI_{sec} et rigidité tangente EI_{tan} . La rigidité sécante (pente origine-point courant) est la rigidité moyenne sur le chemin de chargement, utilisée en analyse MEF itérative. La rigidité tangente (pente instantanée) donne la rigidité exacte à un état de charge donné, utilisée en analyse non linéaire avec mise à jour de la matrice à chaque pas.

Le solveur détecte aussi les *événements de rigidité* : transitions clés des lois de comportement (élasticité vers plasticité, rupture). Pour l'acier, des événements surviennent en traction et en compression ; pour le béton, en compression (palier plastique à ε_{c2} , écrasement à ε_{cu2}). Chaque événement est rapporté avec le matériau, le seuil de déformation, le niveau d'effort et les EI_{sec} , EI_{tan} correspondants.

Résultats calculés

Courbes

$M-\chi$, $N-\varepsilon_0$
 EI_{sec} , EI_{tan} vs. charge
 EA_{sec} , EA_{tan} vs. charge

Tableau d'événements

Matériau : béton / acier
Seuil de déformation critique
Effort, EI ou EA à l'événement
Plastification, palier plastique, écrasement

Exports

PDF : courbes de rigidité + tableau d'événements
XLS / TXT : chemin de chargement complet + événements

Section rectangulaire (Eurocode 2)

Données d'entrée

Béton

- Rectangulaire pleine
- Largeur = 2.00 m, Hauteur = 1.00 m

Armatures

- 56 barres, espacement 100 mm
- Diamètre $\varphi = 25$ mm, enrobage 50 mm
- Taux d'armatures $\rho = 1.37\%$

Matériaux (EC2)

- Béton C40/50 : $f_{ck} = 40$ MPa
- Acier B500B : $f_{yk} = 500$ MPa

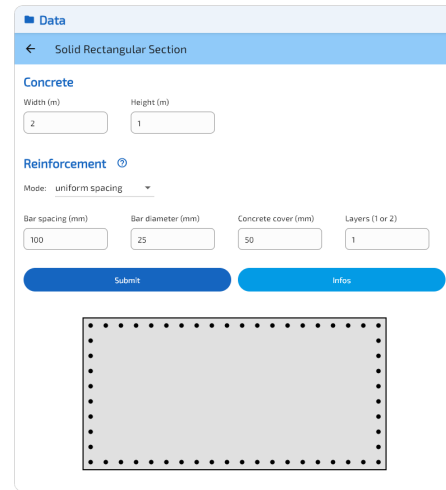


Fig. 1. – Section rectangulaire.

La courbe est calculée en flexion pure : composante libre M_z (courbure χ_z), $N = 0$ et $M_y = 0$ fixes. État limite : ELU Fondamental ($\gamma_c = 1.50$, $\gamma_s = 1.15$). La courbure est balayée de zéro à la rupture ; à chaque pas, le moment et la rigidité sont calculés.

Courbe $M_z-\chi$ et rigidité tangente

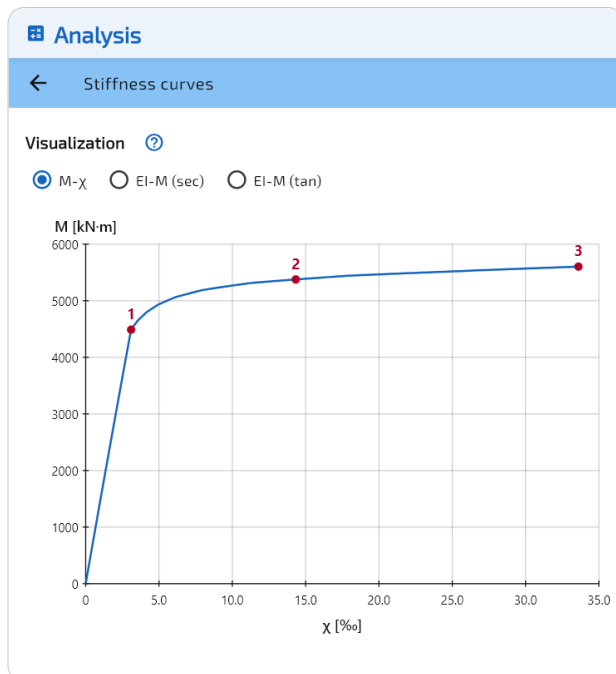


Fig. 2. – Diagramme moment-courbure.

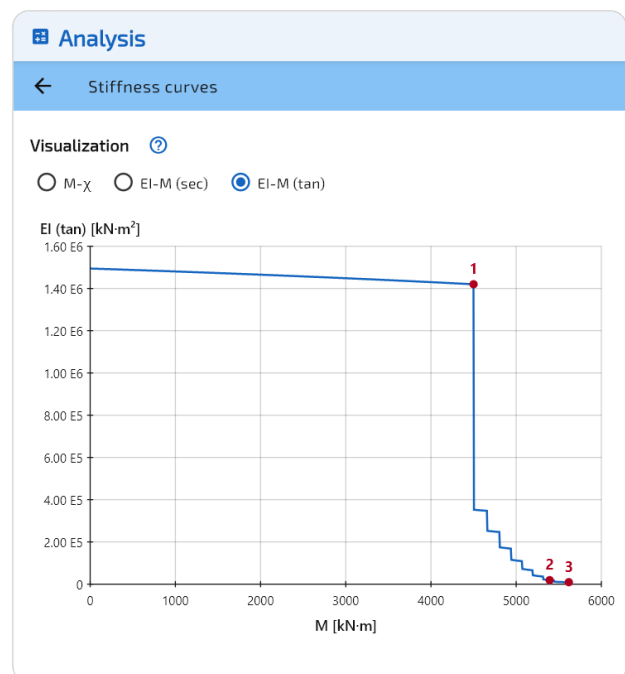


Fig. 3. – Rigidité tangente EI_{tan} .

La courbe $M-\chi$ présente la forme classique : branche initiale raide (modules tangents élevés), coude de transition à l'événement #1 (plastification de l'acier), puis long palier plastique où la courbure croît sans gain notable de moment. Le moment ultime ne dépasse que de 25% le moment de plastification, mais la courbure a décuplé.

La rigidité tangente reste quasi constante en domaine élastique, puis chute brusquement à l'événement #1. La chute est abrupte car toutes les barres de la nappe inférieure partagent la même coordonnée y et plastifient simultanément ; c'est l'armature principale de flexion, d'où un effet immédiat ($EI_{\tan}$ divisé par 4 sur ce seul événement). Si les barres sont à différentes profondeurs, la plastification est progressive et la courbe tangente forme un escalier. Au-delà de l'événement #2, $EI_{\tan}$ tombe près de zéro, reflet du palier plastique quasi plat de la courbe $M-\chi$.

Rigidité sécante EI_{sec} et rigidité axiale EA

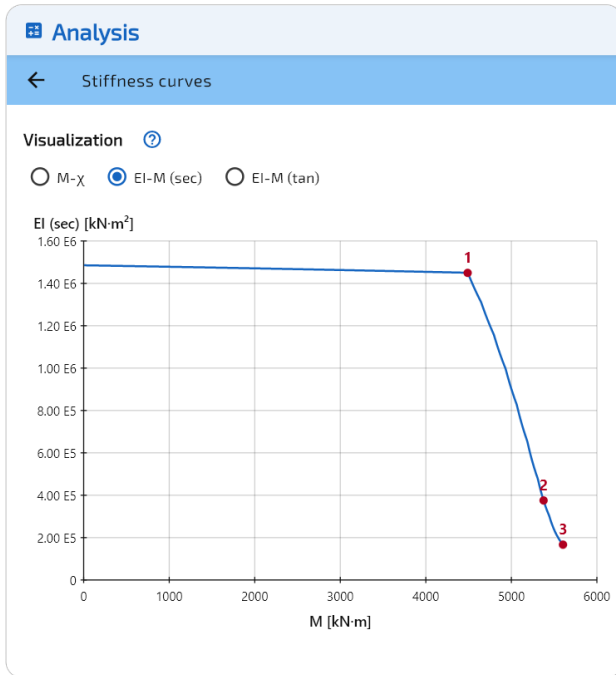


Fig. 4. – Rigidité sécante EI_{sec} .

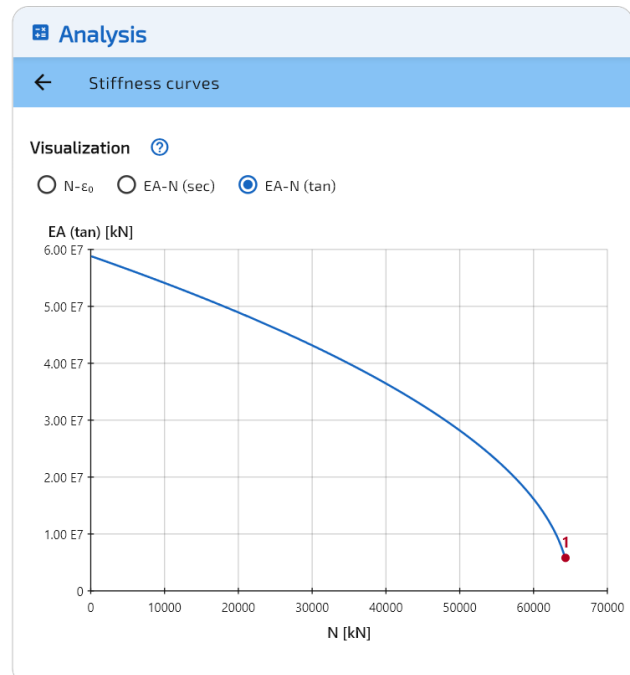


Fig. 5. – Rigidité axiale EA .

La rigidité sécante reste quasi constante en domaine élastique. La chute débute à l'événement #1 (plastification de l'acier), avec seulement 2% de réduction. La chute marquée intervient entre les événements #1 et #2, l'acier plastifiant et le béton entrant dans son palier plastique. À la rupture, seuls 11% de la rigidité initiale subsistent.

La rigidité axiale EA suit un schéma plus simple : elle diminue avec le module tangent de la loi parabole-rectangle du béton sous déformation croissante en compression. La courbe s'arrête à la déformation ultime en compression du béton.

Événements de rigidité ($M-\chi$)

Trois événements sont détectés sur la courbe $M-\chi$ pour cette section et cet état limite :

#	Matériau	$\varepsilon_c / \varepsilon_s$ (‰)	χ_z (‰)	M_z (kN·m)	EI_{sec} (kN·m²)	$EI_{\tan}$ (kN·m²)
1	Acier	2.174	3.084	4 500	1.459E6	1.420E6
2	Béton	-2.000	14.764	5 393	3.653E5	1.897E4
3	Béton	-3.500	34.576	5 618	1.625E5	9.451E3

#1 : plastification de l'acier ($\varepsilon_s = f_{yd}/E_s = 434.8/200\,000 = 2.174 \text{‰}$). #2 : palier plastique du béton à $\varepsilon_{c2} = 2.000 \text{‰}$. #3 : écrasement du béton à $\varepsilon_{cu2} = 3.500 \text{‰}$, terminant la courbe.

Section oblong creux (BAEL 91)

Données d'entrée

Béton

- Oblong creux
- Largeur totale = 4.00 m, Hauteur = 2.00 m
- Largeur rectangulaire = 2.00 m, Épaisseur = 0.30 m

Armatures

- 108 barres, espacement ext. 200 mm
- Diamètre $\varphi = 25$ mm, enrobage 50 mm
- Taux d'armatures $\rho = 1.89\%$

Matériaux (BAEL 91)

- Béton : $f_{c28} = 40$ MPa, $\theta = 0.85$
- Acier : $f_e = 500$ MPa, fissuration P

La courbe est calculée en flexion pure autour de l'axe fort : composante libre M_y (courbure χ_y), $N = 0$ et $M_z = 0$ fixes. État limite : ELU Persistant & Transitoire. Section typique de tablier de pont ; la grande inertie donne un EI initial élevé et le noyau creux amplifie la chute de rigidité après fissuration.

Data

← Hollow Oblong Section

Concrete

Total Width (m): 4 Rect. Width (m): 2 Height (m): 2 Thickness (m): 0.3

Reinforcement

Mode: exterior spacing

Bar spacing (mm): 200 Bar diameter (mm): 25 Concrete cover (mm): 50 Layers (1 or 2): 1

Submit Info

Diagram of a hollow oblong section with reinforcement dots.

Fig. 6. – Section oblong creux.

Courbe $M_y-\chi$ et rigidité tangente

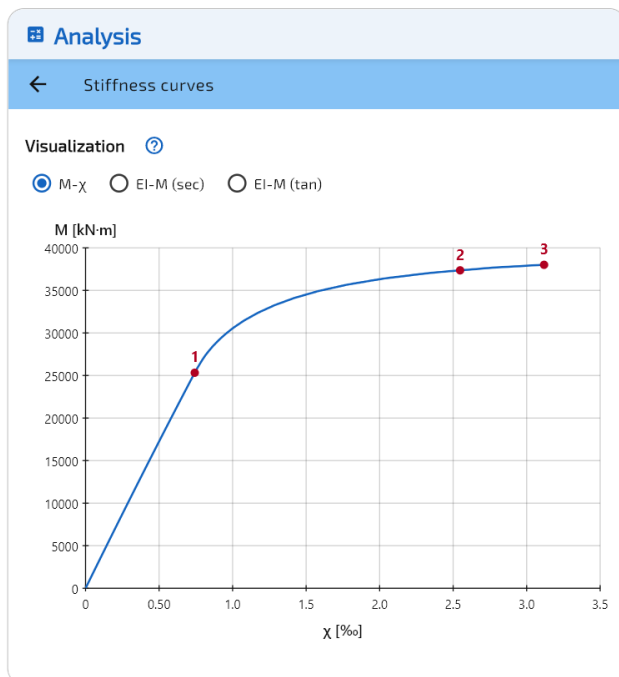


Fig. 7. – Diagramme moment-courbure.

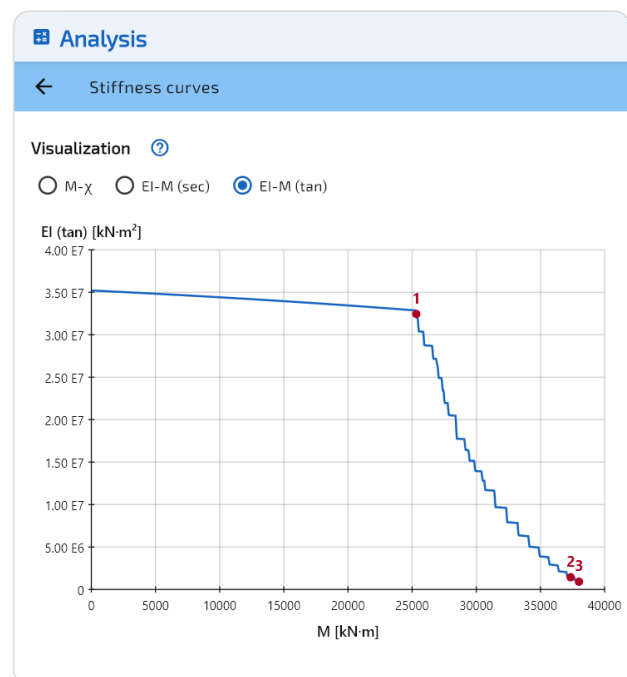


Fig. 8. – Rigidité tangente EI_{tan} .

La courbe $M-\chi$ montre que la dégradation débute à l'événement #1 (plastification de l'acier). Le moment ultime dépasse de 50% le moment de plastification. La courbe se termine ici par rupture de l'acier (événement #3), non par écrasement du béton – mode de rupture différent de la section

rectangulaire où ε_{cu2} était atteint en premier. Le mode de rupture dépend de la géométrie, du ferrailage et des lois de comportement.

La rigidité tangente reste quasi constante en domaine élastique. La chute débute à l'événement #1, et le motif en escalier (plus prononcé ici que pour la section rectangulaire) traduit la plastification progressive des barres autour du périmètre. Après l'événement #2, EI_{tan} continue de chuter, atteignant deux ordres de grandeur sous la valeur initiale à la rupture.

Rigidité sécante EI_{sec} et rigidité axiale EA

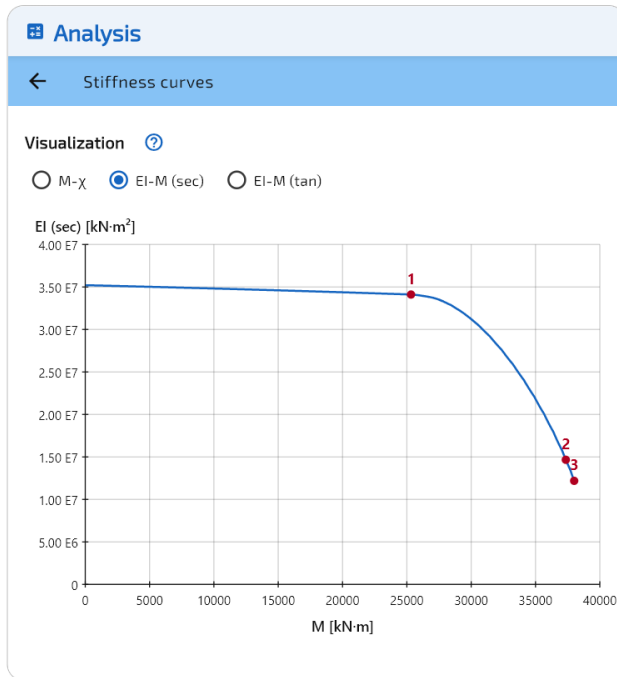


Fig. 9. – Rigidité sécante EI_{sec} .

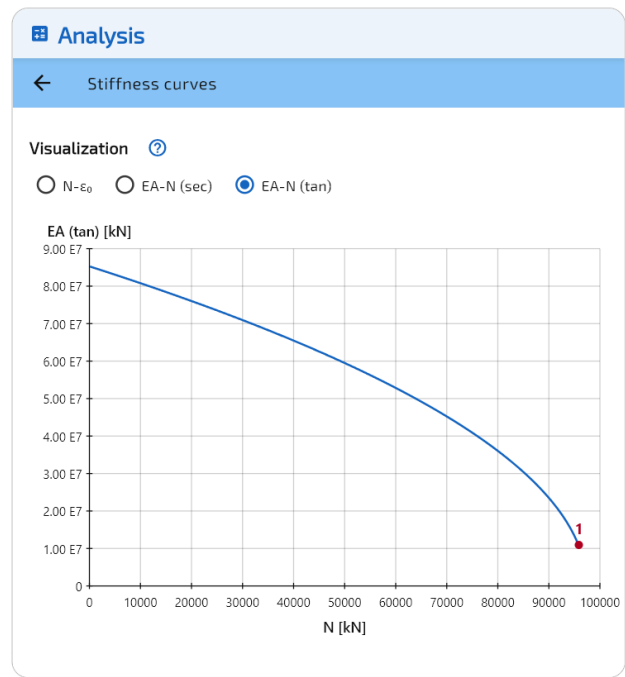


Fig. 10. – Rigidité axiale EA .

La rigidité sécante se dégrade progressivement : seulement 3% de chute à l'événement #1 (plastification de l'acier). La courbe s'accroît après l'événement #2 (palier plastique du béton) ; à la rupture, 35% de la rigidité initiale subsiste. La chute relative moindre (65% contre 89%) est typique des sections creuses à fort taux d'armatures.

Événements de rigidité ($M-\chi$)

#	Matériau	$\varepsilon_c / \varepsilon_s$ (‰)	χ_y (‰)	M_y (kN·m)	EI_{sec} (kN·m²)	EI_{tan} (kN·m²)
1	Acier	2.174	0.742	25 324	3.411E7	3.244E7
2	Béton	-2.000	2.547	37 356	1.466E7	1.439E6
3	Acier	10.000	3.119	38 006	1.219E7	9.154E5

#1 : plastification de l'acier ($\varepsilon_s = 2.174$ ‰). #2 : palier plastique du béton ($\varepsilon_{c2} = 2.000$ ‰). #3 : rupture de l'acier à $\varepsilon_{ud} = 10.0$ ‰ (allongement ultime de calcul BAEL), terminant la courbe. Contrairement à la section rectangulaire (rupture par écrasement du béton à ε_{cu2}), cette section rompt par l'acier, illustrant la dépendance du mode de rupture à la géométrie et au ferrailage.

Benchmark de performance

Points de discrétisation	Rectangulaire (ms)	EC2	Oblong BAEI (ms)
100	5.2		6.5
500	15.5		11.3
1 000 (défaut)	17.3		19.5
5 000	61.0		60.9

Le calcul est quasi instantané quel que soit le nombre de points : même à 5 000 points, les deux sections sont traitées en moins de 61 ms.

Export

SectionPro exporte les courbes aux formats PDF, TXT et XLS pour réutilisation externe. L'export PDF inclut les visualisations des courbes.

STIFFNESS CURVES CALCULATION RESULTS

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-04-02 19:39

Events

Events correspond to special situations during the gradual construction of the stiffness curve where a material (concrete or steel) reaches an elastic or plastic deformation:

Param	Units	#1	#2	#3
Material		Steel	Concrete	Concrete
ec / es	‰	2.174	-2.000	-3.500
yz	‰	3.084	14.764	34.576
Mz	kN-m	4499.9	5393.2	5618.1
EI (sec)	kN-m ²	1.459 E6	3.653 E5	1.625 E5
EI (tan)	kN-m ²	1.420 E6	1.897 E4	9.451 E3

Visualization

Below are the stiffness curves and associated events

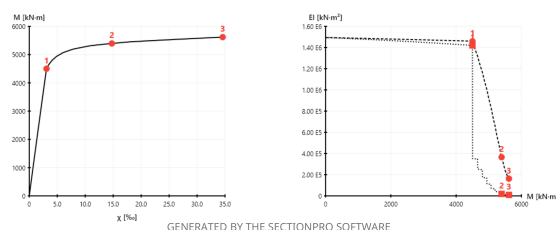


Fig. 11. – Export PDF, section rectangulaire.

STIFFNESS CURVES CALCULATION RESULTS

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-03-31 21:03

Events

Events correspond to special situations during the gradual construction of the stiffness curve where a material (concrete or steel) reaches an elastic or plastic deformation:

Param	Units	#1	#2	#3
Material		Steel	Concrete	Steel
ec / es	‰	2.174	-2.000	10.000
xy	‰	0.742	2.547	3.119
My	kN-m	25324.0	37355.6	38006.3
EI (sec)	kN-m ²	3.411 E7	1.466 E7	1.219 E7
EI (tan)	kN-m ²	3.244 E7	1.439 E6	9.154 E5

Visualization

Below are the stiffness curves and associated events

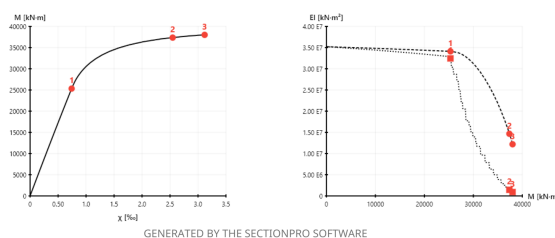


Fig. 12. – Export PDF, section oblong.

Conclusion

Le module fournit l'évolution réelle de la rigidité flexionnelle et axiale en fonction du chargement. En balayant une composante d'effort de zéro à la rupture, il capture le chemin complet de dégradation – réponse élastique, plastification progressive, rupture – et rapporte courbures et déformations axiales à chaque niveau de charge.

Les rigidités sécante et tangente (EI_{sec} , EI_{tan} , EA) fournissent les valeurs réelles pour les modèles structuraux, remplaçant l'hypothèse de EI constant. Les événements de rigidité, détectés automatiquement, identifient les transitions clés des lois de comportement (élastique-plastique, palier, rupture) avec les efforts et rigidités associés.