



Curvas de rigidez

Tutorial SectionPro: diagramas momento-curvatura
y degradación de la rigidez flexional bajo carga creciente

BridgeKernel · 2026

Introducción

El hormigón armado no es un material lineal: su rigidez flexional EI depende del nivel de carga. A cargas bajas, los materiales permanecen en rango elástico (acero) o tangente inicial (hormigón), y EI es alta. Al aumentar la carga, el hormigón entra en la rama descendente de su ley parábola-rectángulo y el acero alcanza su meseta de plastificación, causando una caída de EI . Esta degradación importa para estimar desplazamientos realistas, y más ampliamente en todo análisis donde los esfuerzos dependen de la distribución de rigideces: estructuras hiperestáticas, segundo orden, redistribución.

SectionPro traza la respuesta completa fijando dos componentes de fuerza e incrementando la tercera (N , M_z o M_y) de cero a rotura. En cada paso se resuelve un equilibrio iterativo para hallar el estado de deformación. El enfoque también cubre flexión biaxial: variando N fijo, se observa cómo la curva $M-\chi$ se desplaza (compresión rigidiza, tracción ablanda). Se obtienen tres curvas: fuerza-deformación ($M-\chi$), rigidez secante EI_{sec} y rigidez tangente EI_{tan} . La secante (pendiente origen-punto actual) es la rigidez media del camino de carga, usada en análisis FEM iterativo. La tangente (pendiente instantánea) da la rigidez exacta en un estado dado, usada en análisis no lineal con actualización de la matriz de rigidez en cada paso.

El solver detecta además *eventos de rigidez*: transiciones clave en las leyes constitutivas (elasticidad a plasticidad, rotura). En acero, pueden ocurrir en tracción y compresión; en hormigón, en compresión (meseta plástica en ε_{c2} , aplastamiento en ε_{cu2}). Cada evento indica material, umbral de deformación, nivel de carga, EI_{sec} y EI_{tan} .

Resultados calculados

Curvas

$M-\chi$, $N-\varepsilon_0$
 EI_{sec} , EI_{tan} vs. carga
 EA_{sec} , EA_{tan} vs. carga

Tabla de eventos

Material: hormigón / acero
Umbral de deformación crítico
Fuerza, EI o EA en el evento
Plastificación, meseta, aplastamiento

Exportaciones

PDF: curvas de rigidez + tabla de eventos
XLS / TXT: trayectoria de carga completa + eventos

Sección rectangular (Eurocódigo 2)

Datos de entrada

Hormigón

- Sección transversal rectangular maciza
- Ancho = 2.00 m, Altura = 1.00 m

Armadura

- 56 barras, espaciamiento uniforme 100 mm
- Diámetro $\varphi = 25$ mm, recubrimiento 50 mm
- Cuantía $\rho = 1.37\%$

Leyes de materiales (EC2)

- Hormigón C40/50: $f_{ck} = 40$ MPa
- Acero B500B: $f_{yk} = 500$ MPa

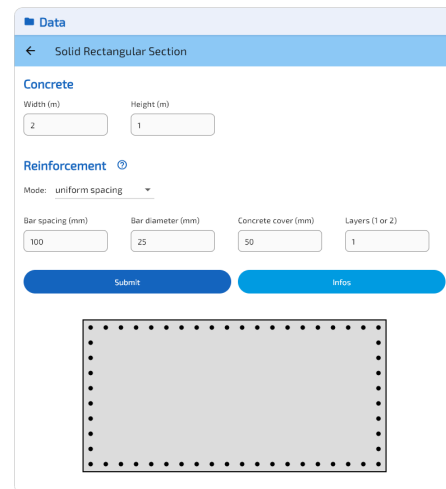


Figura 1: Sección transversal rectangular.

La curva se calcula en flexión pura: componente libre M_z (curvatura χ_z), con $N = 0$ y $M_y = 0$ fijos. Estado límite ELU Fundamental ($\gamma_c = 1.50$, $\gamma_s = 1.15$). La curvatura se barre de cero a rotura; en cada paso se obtienen momento y rigidez.

Curva $M_z-\chi$ y rigidez tangente

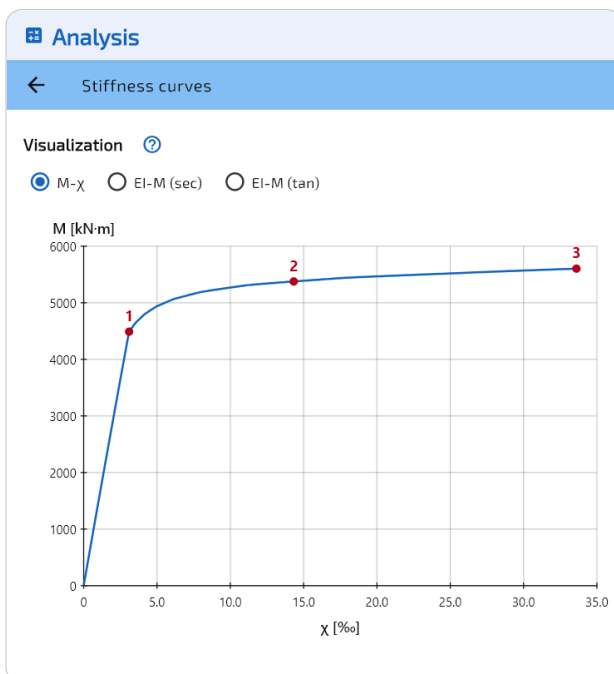


Figura 2: Diagrama momento-curvatura.

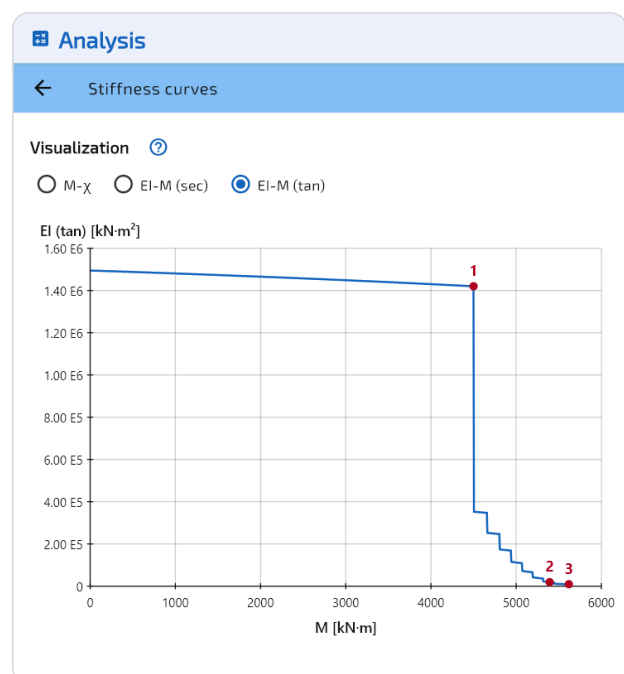


Figura 3: Rigidez tangente EI_{tan} .

La curva $M-\chi$ presenta la forma clásica: rama inicial empinada con módulos tangentes altos, codo de transición en el evento #1 (plastificación del acero) y larga meseta plástica donde curvatura adicional produce poco momento extra. El momento último supera en solo 25% al de plastificación, pero la curvatura se ha multiplicado por diez.

La rigidez tangente es casi-constante en rango elástico y cae bruscamente en el evento #1. La caída es abrupta porque todas las barras inferiores comparten la misma coordenada y y plastifican simultáneamente; al ser la armadura principal, su pérdida de rigidez es inmediata (EI_{\tan} dividida por 4 en un solo evento). Con barras a distintas profundidades, la plastificación es progresiva y la curva muestra un patrón escalonado. Tras el evento #2, EI_{\tan} cae a casi cero, reflejando la meseta plana de la curva $M-\chi$.

Rigidez secante EI_{sec} y rigidez axial EA

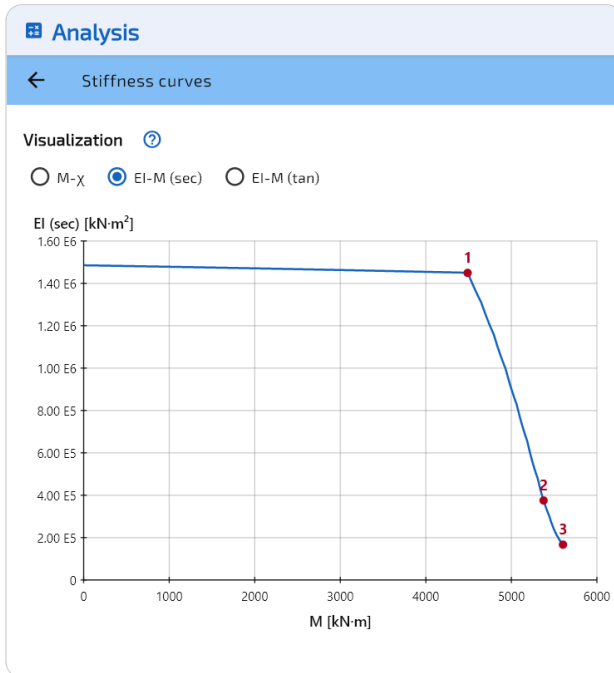


Figura 4: Rigidez secante EI_{sec} .

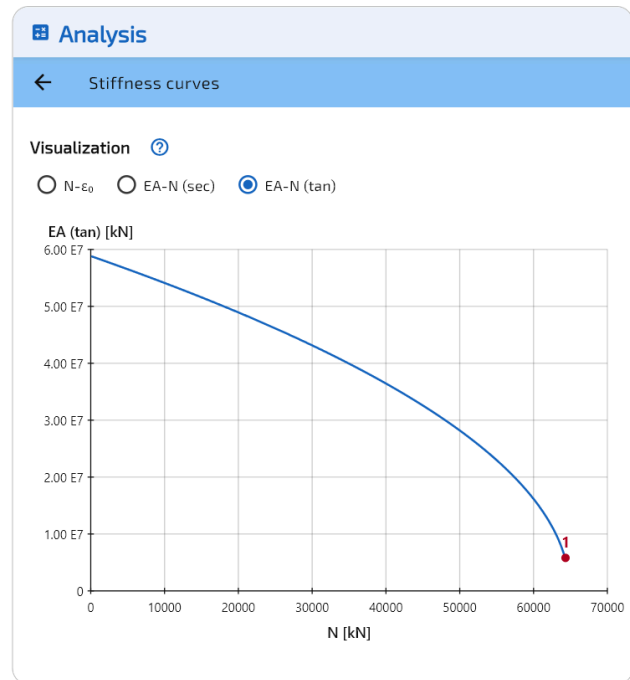


Figura 5: Rigidez axial EA .

La rigidez secante es casi constante en rango elástico. La caída empieza en el evento #1 (plastificación del acero), con solo un 2% de reducción. La caída fuerte ocurre entre los eventos #1 y #2, al plastificar el acero y entrar el hormigón en meseta plástica. En rotura, solo queda el 11% de la rigidez inicial.

La rigidez axial EA sigue un patrón más simple: decrece al reducirse el módulo tangente de la ley parábola-rectángulo bajo compresión creciente. La curva termina al alcanzar la deformación última del hormigón.

Eventos de rigidez ($M-\chi$)

El solver detecta tres eventos en la curva $M-\chi$ para esta sección y estado límite:

#	Material	$\varepsilon_c / \varepsilon_s$ (‰)	χ_z (‰)	M_z (kN·m)	EI_{sec} (kN·m ²)	EI_{tan} (kN·m ²)
1	Acero	2.174	3.084	4 500	1.459E6	1.420E6
2	Hormigón	-2.000	14.764	5 393	3.653E5	1.897E4
3	Hormigón	-3.500	34.576	5 618	1.625E5	9.451E3

Evento #1: plastificación del acero ($\varepsilon_s = f_{yd}/E_s = 434.8/200\,000 = 2.174\text{‰}$). Evento #2: hormigón en meseta plástica $\varepsilon_{c2} = 2.000\text{‰}$. Evento #3: aplastamiento del hormigón en $\varepsilon_{cu2} = 3.500\text{‰}$, fin de la curva.

Sección oblonga hueca (BAEL 91)

Datos de entrada

Hormigón

- Sección transversal oblonga hueca
- Ancho total = 4.00 m, Altura = 2.00 m
- Ancho rectangular = 2.00 m, Espesor = 0.30 m

Armadura

- 108 barras, espaciado exterior 200 mm
- Diámetro $\varphi = 25$ mm, recubrimiento 50 mm
- Cuantía $\rho = 1.89\%$

Leyes de materiales (BAEL 91)

- Hormigón: $f_{c28} = 40$ MPa, $\theta = 0.85$
- Acero: $f_e = 500$ MPa, fisuración P

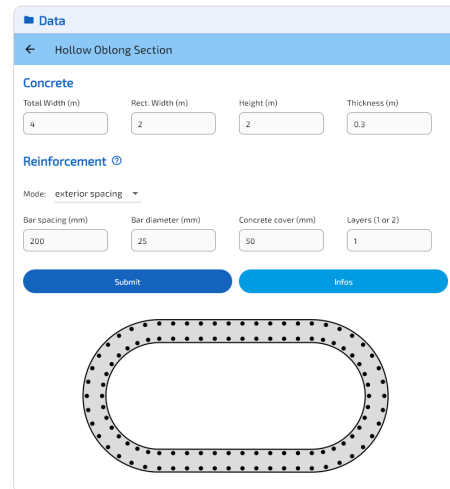


Figura 6: Sección oblonga hueca.

La curva se calcula en flexión pura respecto al eje fuerte: componente libre M_y (curvatura χ_y), con $N = 0$ y $M_z = 0$ fijos. Estado límite ELU Persistente y Transitorio. Esta sección es típica de tableros de puente; su gran inercia produce un EI inicial elevado y el núcleo hueco amplifica la caída de rigidez tras la fisuración.

Curva $M_y-\chi$ y rigidez tangente

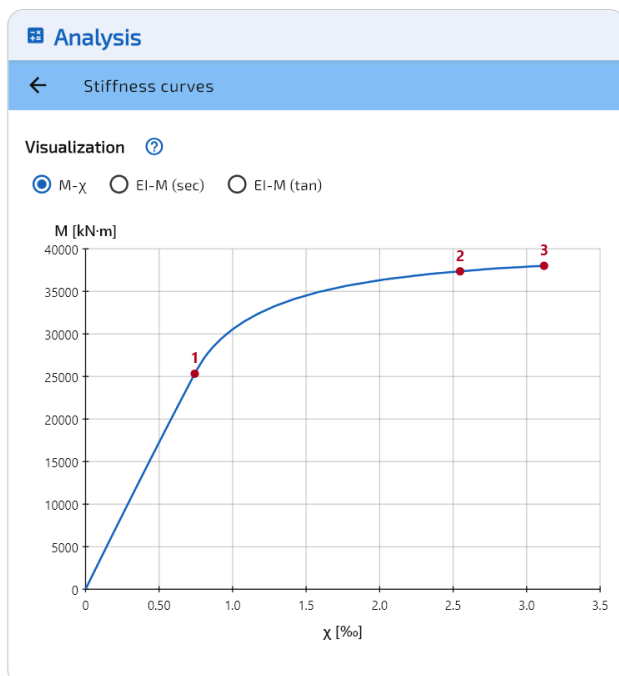


Figura 7: Diagrama momento-curvatura.

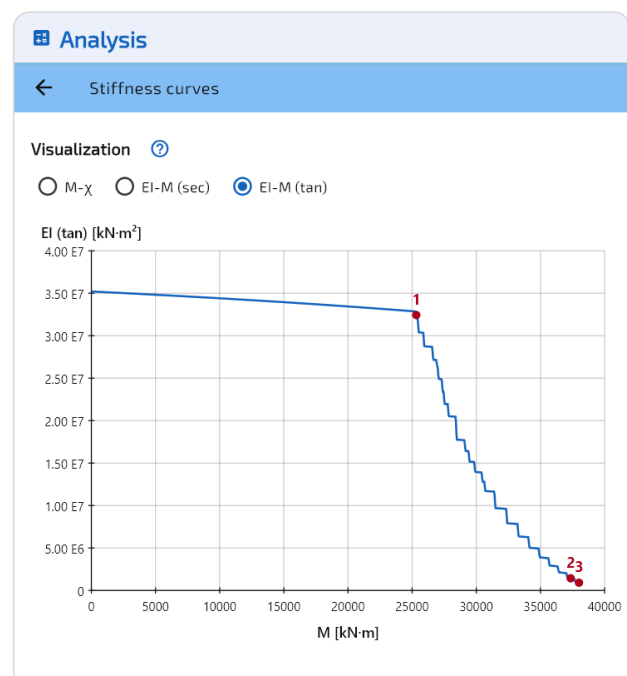


Figura 8: Rigidez tangente EI_{tan} .

La curva $M-\chi$ muestra que la degradación comienza en el evento #1 (plastificación del acero). El momento último supera en 50% al de plastificación. Aquí la curva termina por rotura del acero (evento #3) y no por aplastamiento del hormigón, a diferencia de la sección rectangular donde se alcanzó

ε_{cu2} primero. No todos los eventos ocurren en todas las secciones: el modo de rotura depende de la geometría, armaduras y leyes de materiales.

La rigidez tangente es cuasi-constante en rango elástico. La caída comienza en el evento #1; el patrón escalonado (más marcado que en la sección rectangular) refleja la plastificación progresiva de barras individuales alrededor del perímetro. Tras el evento #2, EI_{tan} sigue cayendo hasta dos órdenes de magnitud bajo el valor inicial en rotura.

Rigidez secante EI_{sec} y rigidez axial EA

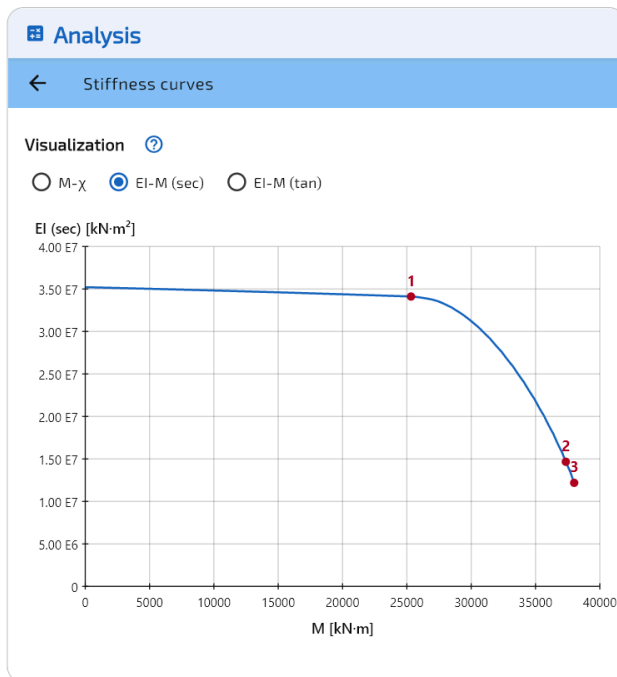


Figura 9: Rigidez secante EI_{sec} .

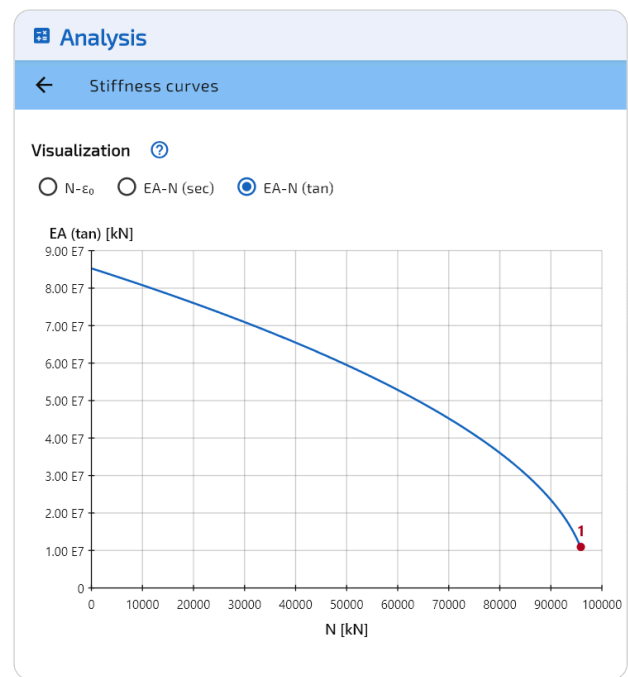


Figura 10: Rigidez axial EA .

La rigidez secante se degrada gradualmente: solo 3% de caída en el evento #1 (plastificación del acero). La curva se acentúa tras el evento #2 (meseta plástica del hormigón), y en rotura queda un 35% de la rigidez inicial. La menor caída relativa frente a la sección rectangular (65% vs. 89%) es típica de secciones huecas con alta cuantía.

Eventos de rigidez ($M-\chi$)

#	Material	$\varepsilon_c / \varepsilon_s$ (‰)	χ_y (‰)	M_y ($\text{kN}\cdot\text{m}$)	EI_{sec} ($\text{kN}\cdot\text{m}^2$)	EI_{tan} ($\text{kN}\cdot\text{m}^2$)
1	Acero	2.174	0.742	25 324	3.411E7	3.244E7
2	Hormigón	-2.000	2.547	37 356	1.466E7	1.439E6
3	Acero	10.000	3.119	38 006	1.219E7	9.154E5

Evento #1: plastificación del acero ($\varepsilon_s = 2.174$ ‰). Evento #2: hormigón en meseta plástica ($\varepsilon_{c2} = 2.000$ ‰). Evento #3: rotura del acero en $\varepsilon_{ud} = 10.0$ ‰ (elongación última de cálculo BAEL), fin de la curva. A diferencia de la sección rectangular (rotura por aplastamiento del hormigón, ε_{cu2}), aquí falla el acero, ilustrando que los eventos activados dependen de la geometría y disposición de armaduras.

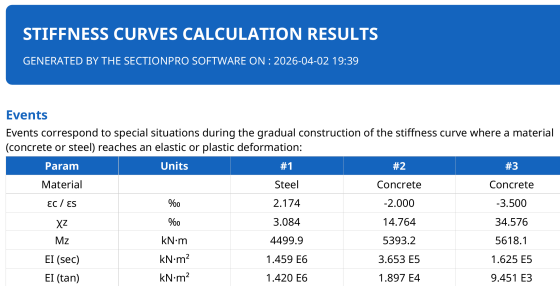
Benchmark de rendimiento

Puntos de discretización	Rectangular EC2 (ms)	Oblonga BAEL (ms)
100	5.2	6.5
500	15.5	11.3
1 000 (por defecto)	17.3	19.5
5 000	61.0	60.9

El cálculo es instantáneo sin importar el número de puntos: incluso con 5 000, ambas secciones se completan en menos de 61 ms.

Exportación

SectionPro exporta los valores en PDF, TXT y XLS para uso en herramientas externas. El PDF incluye también las visualizaciones de las curvas.



Visualization
Below are the stiffness curves and associated events

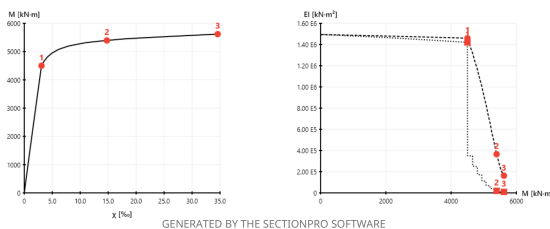
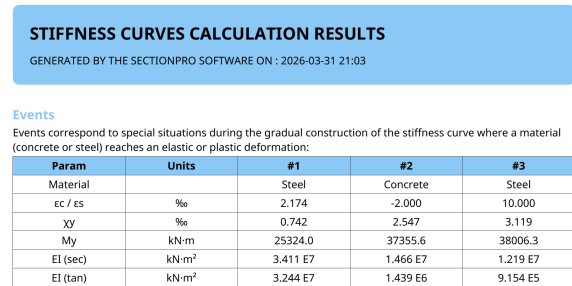


Figura 11: Exportación PDF, sección rectangular.



Visualization
Below are the stiffness curves and associated events

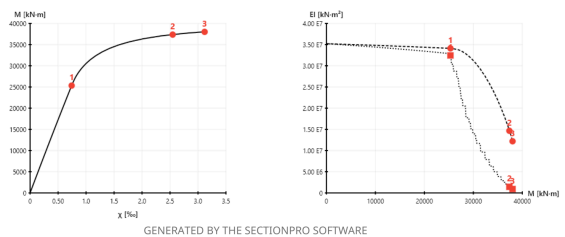


Figura 12: Exportación PDF, sección oblonga.

Conclusión

El módulo de curvas de rigidez proporciona la evolución real de la rigidez flexional y axial en función de la carga. Barriando una componente de fuerza de cero a rotura, captura la trayectoria completa de degradación – de la respuesta elástica inicial a la plastificación progresiva y la rotura – reportando curvaturas y deformaciones axiales en cada nivel.

Las rigideces secante y tangente (EI_{sec} , EI_{tan} , EA) dan al ingeniero los valores reales para modelos estructurales, reemplazando la hipótesis de EI constante. Los eventos detectados automáticamente identifican las transiciones clave (elástico a plástico, meseta, rotura) con sus niveles de carga y rigideces asociados.