

# Steifigkeitskurven

SectionPro Tutorial: Momenten-Krümmungsdiagramme  
und Biegesteifigkeitsabbau unter zunehmender Last

BridgeKernel · 2026

## Einleitung

Stahlbeton ist kein lineares Material: Seine Biegesteifigkeit  $EI$  hängt vom Lastniveau ab. Bei geringen Lasten bleiben alle Materialien im elastischen (Stahl) bzw. Anfangstangentenbereich (Beton) ihrer Stoffgesetze,  $EI$  ist hoch. Mit zunehmender Last tritt der Beton in den abfallenden Ast seines Parabel-Rechteck-Gesetzes ein und der Stahl erreicht sein Fließplateau –  $EI$  nimmt ab. Diese Abnahme beeinflusst nicht nur die Verformungen, sondern auch die Schnittgrößenverteilung in statisch unbestimmten Systemen, bei Theorie-II.-Ordnung und Umlagerungsproblemen.

SectionPro erfasst die vollständige Querschnittsantwort: Zwei Kraftkomponenten werden fixiert, die dritte ( $N$ ,  $M_z$  oder  $M_y$ ) von Null bis zum Versagen gesteigert. Pro Schritt wird iterativ der Dehnungszustand bestimmt. Der Ansatz erfasst auch zweiachsige Biegung: Variation der Normalkraft  $N$  verschiebt die  $M$ - $\chi$ -Kurve – Druck versteift, Zug entfestigt. Drei Kurven entstehen:  $M$ - $\chi$ , Sekantensteifigkeit  $EI_{\text{sec}}$  und Tangentensteifigkeit  $EI_{\text{tan}}$ . Die Sekantensteifigkeit (Steigung Ursprung – aktueller Punkt) ist die mittlere Steifigkeit entlang des Lastpfads, üblich in iterativen FEM-Analysen. Die Tangentensteifigkeit (momentane Steigung) liefert die exakte Steifigkeit im aktuellen Lastzustand, eingesetzt in nichtlinearen Analysen mit schrittweiser Aktualisierung der Steifigkeitsmatrix.

Der Solver erkennt *Steifigkeitereignisse*, d.h. Übergänge auf den Stoffgesetzen: Elastizität zu Plastizität und Bruch. Beim Stahl treten Ereignisse auf Zug und Druck auf; beim Beton auf Druck (Plateau bei  $\varepsilon_{c2}$ , Druckbruch bei  $\varepsilon_{cu2}$ ). Jedes Ereignis wird mit Material, Dehnungsschwelle, Kraftniveau und zugehörigem  $EI_{\text{sec}}$  bzw.  $EI_{\text{tan}}$  ausgegeben.

## Berechnete Ergebnisse

### Kurven

$M$ - $\chi$ ,  $N$ - $\varepsilon_0$   
 $EI_{\text{sec}}$ ,  $EI_{\text{tan}}$  vs. Last  
 $EA_{\text{sec}}$ ,  $EA_{\text{tan}}$  vs. Last

### Ereignistabelle

Material: Beton / Stahl  
Kritische Dehnungsschwelle  
Kraft,  $EI$  oder  $EA$  beim Ereignis  
Fließen, plastisches Plateau,  
Druckbruch

### Exporte

PDF: Steifigkeitskurven + Ereignistabelle  
XLS / TXT: vollständiger Lastpfad + Ereignisse

# Rechteckquerschnitt (Eurocode 2)

## Eingabedaten

### Beton

- Massiver Rechteckquerschnitt
- Breite = 2{,}00 m, Höhe = 1{,}00 m

### Bewehrung

- 56 Stäbe, gleichmäßiger Abstand 100 mm
- Durchmesser  $\varphi = 25$  mm, Betondeckung 50 mm
- Bewehrungsgrad  $\rho = 1{,}37\%$

### Stoffgesetze (EC2)

- Beton C40/50:  $f_{ck} = 40$  MPa
- Stahl B500B:  $f_{yk} = 500$  MPa

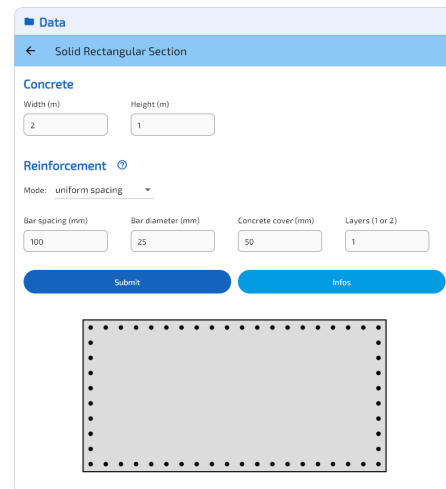


Abbildung 1: Rechteckquerschnitt.

Die Kurve wird unter reiner Biegung berechnet: Freie Komponente ist  $M_z$  (Krümmung  $\chi_z$ ), mit  $N = 0$  und  $M_y = 0$ . Grenzzustand: GZT Grundkombination ( $\gamma_c = 1{,}50$ ,  $\gamma_s = 1{,}15$ ). Die Krümmung wird von Null bis zum Versagen durchlaufen; pro Schritt werden Moment und Steifigkeit bestimmt.

## $M_z$ - $\chi$ -Kurve und Tangentensteifigkeit

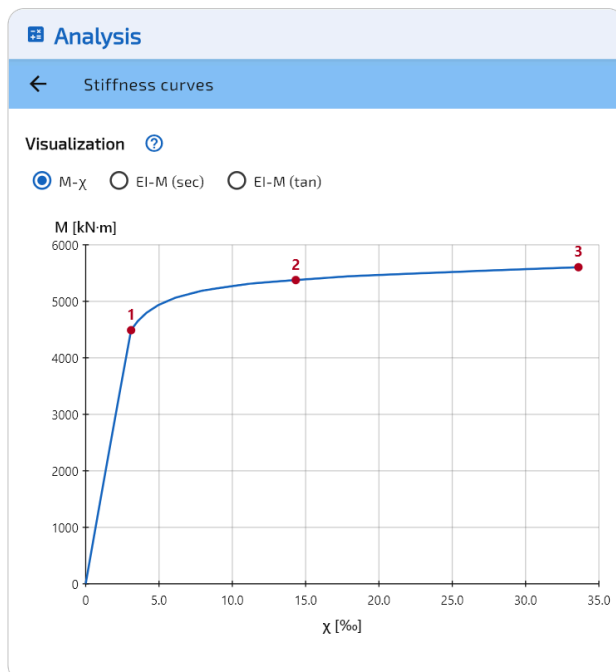


Abbildung 2: Momenten-Krümmungsdiagramm.

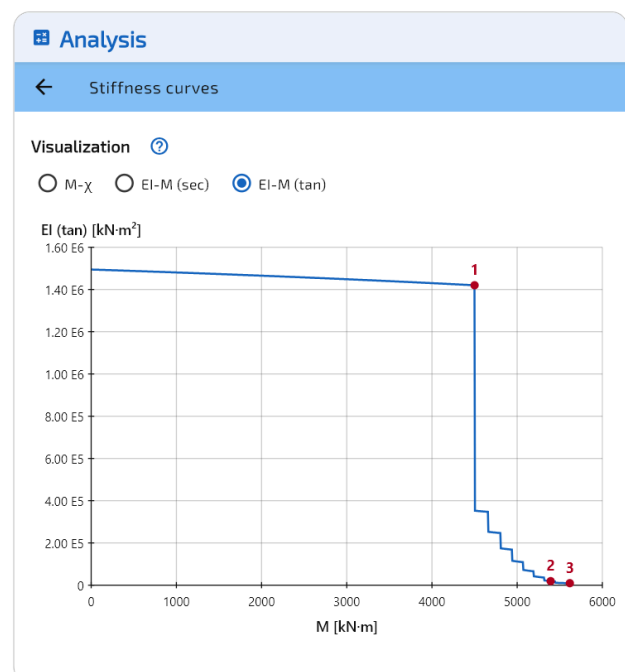


Abbildung 3: Tangentensteifigkeit  $EI_{\tan}$ .

Die  $M$ - $\chi$ -Kurve zeigt die klassische Form: steiler Anfangsast mit hohen Tangentenmoduli, Knick bei Ereignis #1 (Stahlfießen) und langes plastisches Plateau, auf dem zusätzliche Krümmung kaum Momentuwachs bringt. Das Bruchmoment liegt nur 25% über dem Fließmoment, die Krümmung hat sich jedoch verzehnfacht.

Die Tangentensteifigkeit bleibt im elastischen Bereich nahezu konstant, dann folgt ein abrupter Abfall bei Ereignis #1. Er ist schlagartig, da alle Stäbe der unteren Lage dieselbe  $y$ -Koordinate haben und gleichzeitig fließen; als Hauptbiegebewehrung bewirkt ihr Steifigkeitsverlust eine sofortige Verteilung von  $EI_{\tan}$ . Bei Stäben in verschiedenen Tiefen erfolgt das Fließen progressiv – die Tangentenkurve zeigt dann ein Treppenstufenmuster. Ab Ereignis #2 fällt  $EI_{\tan}$  nahe Null, entsprechend dem flachen plastischen Plateau der  $M-\chi$ -Kurve.

## Sekantensteifigkeit $EI_{\text{sec}}$ und Axialsteifigkeit $EA$

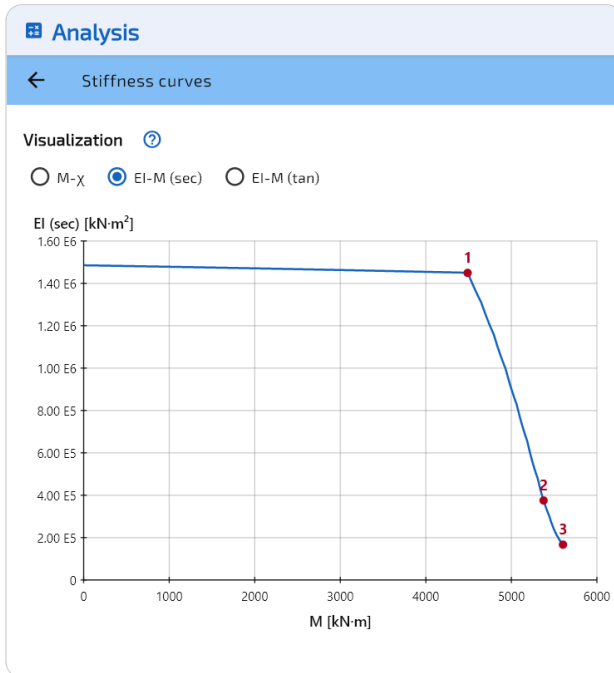


Abbildung 4: Sekantensteifigkeit  $EI_{\text{sec}}$ .

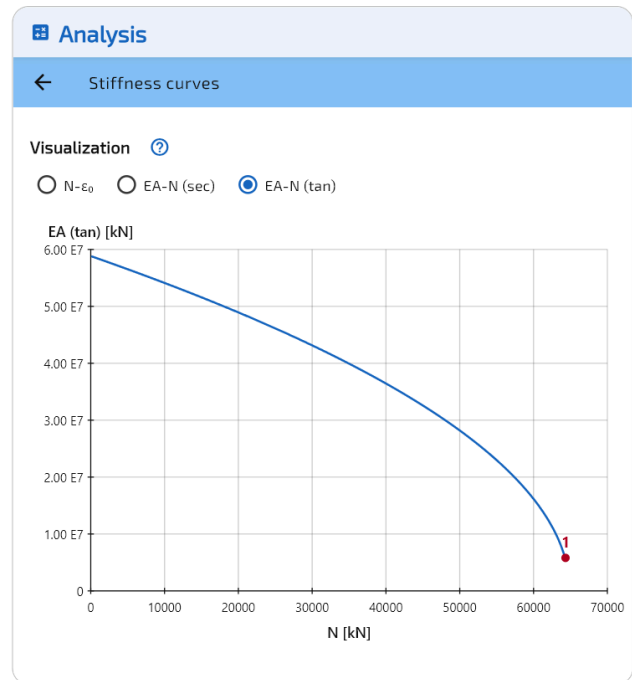


Abbildung 5: Axialsteifigkeit  $EA$ .

Die Sekantensteifigkeit bleibt im elastischen Bereich nahezu konstant. Bei Ereignis #1 (Stahlfließen) beträgt der Abfall nur 2%. Der steile Abfall erfolgt zwischen Ereignis #1 und #2, wenn Stahl fließt und Beton sein plastisches Plateau erreicht. Beim Versagen verbleiben nur etwa 11% der Anfangssteifigkeit.

Die Axialsteifigkeit  $EA$  folgt einem einfacheren Verlauf: Sie nimmt mit dem Tangentenmodul des Beton-Parabel-Rechteck-Gesetzes bei steigender Druckdehnung ab. Die Kurve endet bei Erreichen der Bruchdehnung des Betons.

## Steifigkeitsereignisse ( $M-\chi$ )

Drei Ereignisse werden entlang der  $M-\chi$ -Kurve erkannt:

#	Material	$\varepsilon_c / \varepsilon_s$ (‰)	$\chi_z$ (‰)	$M_z$ (kN·m)	$EI_{\text{sec}}$ (kN·m <sup>2</sup> )	$EI_{\text{tan}}$ (kN·m <sup>2</sup> )
1	Stahl	2.174	3.084	4 500	1.459E6	1.420E6
2	Beton	-2.000	14.764	5 393	3.653E5	1.897E4
3	Beton	-3.500	34.576	5 618	1.625E5	9.451E3

Ereignis #1: Stahlfließen ( $\varepsilon_s = f_{yd}/E_s = 434\{, \}8/200\,000 = 2\{, \}174$  ‰). Ereignis #2: plastisches Plateau des Betons bei  $\varepsilon_{c2} = 2\{, \}000$  ‰. Ereignis #3: Betondruckbruch bei  $\varepsilon_{cu2} = 3\{, \}500$  ‰, beendet die Kurve.

# Hohlquerschnitt oblong (BAEL 91)

## Eingabedaten

### Beton

- Hohlquerschnitt oblong
- Gesamtbreite = 4{,}00 m, Höhe = 2{,}00 m
- Rechteckbreite = 2{,}00 m, Wandstärke = 0{,}30 m

### Bewehrung

- 108 Stäbe, äußerer Abstand 200 mm
- Durchmesser  $\varphi = 25$  mm, Betondeckung 50 mm
- Bewehrungsgrad  $\rho = 1{,}89\%$

### Stoffgesetze (BAEL 91)

- Beton:  $f_{c28} = 40$  MPa,  $\theta = 0{,}85$
- Stahl:  $f_e = 500$  MPa, Rissbildung P

Die Kurve wird unter reiner Biegung um die starke Achse berechnet: Freie Komponente ist  $M_y$  (Krümmung  $\chi_y$ ), mit  $N = 0$  und  $M_z = 0$ . Grenzzustand: GZT ständig/vorübergehend. Dieser Querschnitt ist typisch für Brückenüberbauten; das große Trägheitsmoment erzeugt eine hohe Anfangs- $EI$  und der Hohlkern verstärkt den Steifigkeitsabfall nach Rissbildung.

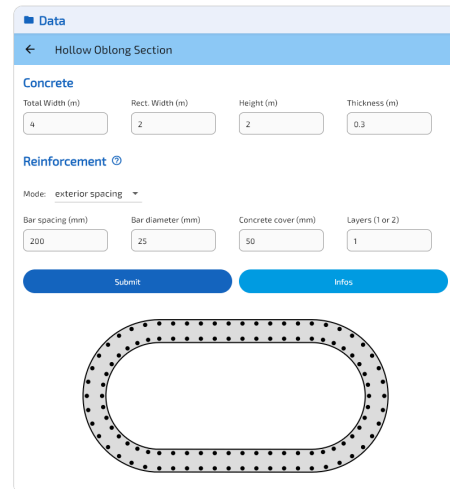


Abbildung 6: Hohlquerschnitt oblong.

## $M_y$ - $\chi$ -Kurve und Tangentensteifigkeit

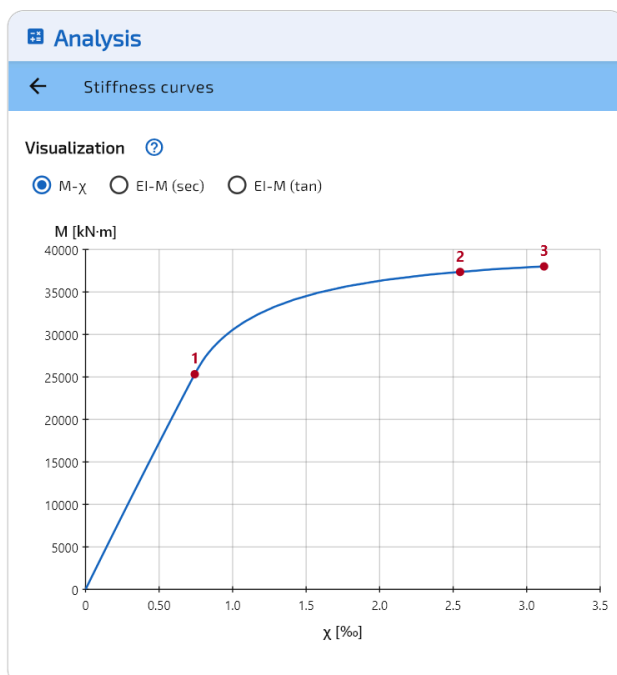


Abbildung 7: Momenten-Krümmungsdiagramm.

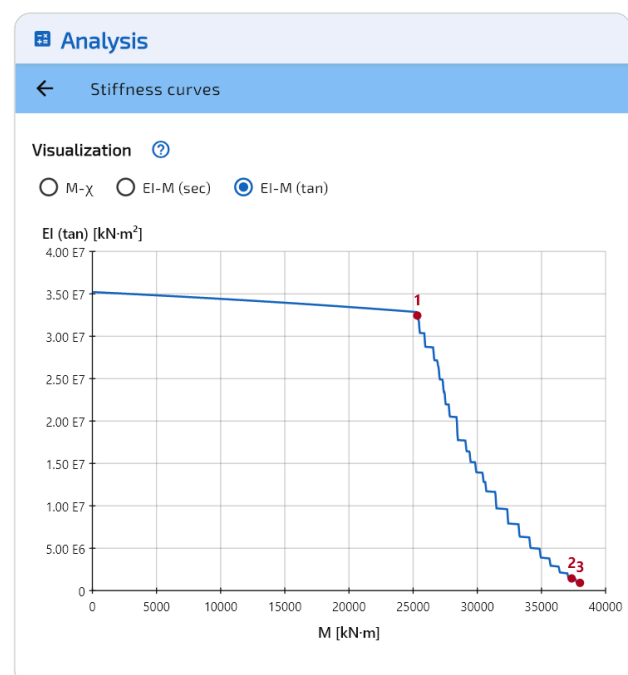


Abbildung 8: Tangentensteifigkeit  $EI_{tan}$ .

Die  $M$ - $\chi$ -Kurve zeigt den Beginn der Steifigkeitsabnahme bei Ereignis #1 (Stahlfließen). Das Bruchmoment liegt 50% über dem Fließmoment. Hier endet die Kurve durch Stahlbruch (Ereignis #3),

nicht durch Betondruckbruch – ein anderer Versagensmodus als beim Rechteckquerschnitt, wo  $\varepsilon_{cu2}$  zuerst erreicht wurde. Nicht alle Ereignisse treten bei jedem Querschnitt auf: Der Versagensmodus hängt von Geometrie, Bewehrung und Stoffgesetzen ab.

Die Tangentensteifigkeit bleibt im elastischen Bereich nahezu konstant. Ab Ereignis #1 zeigt das Treppenstufenmuster (hier ausgeprägter als beim Rechteck) das progressive Fließen der Bewehrungsstäbe am Umfang. Nach Ereignis #2 fällt  $EI_{tan}$  weiter und erreicht beim Versagen zwei Größenordnungen unter dem Anfangswert.

## Sekantensteifigkeit $EI_{sec}$ und Axialsteifigkeit $EA$

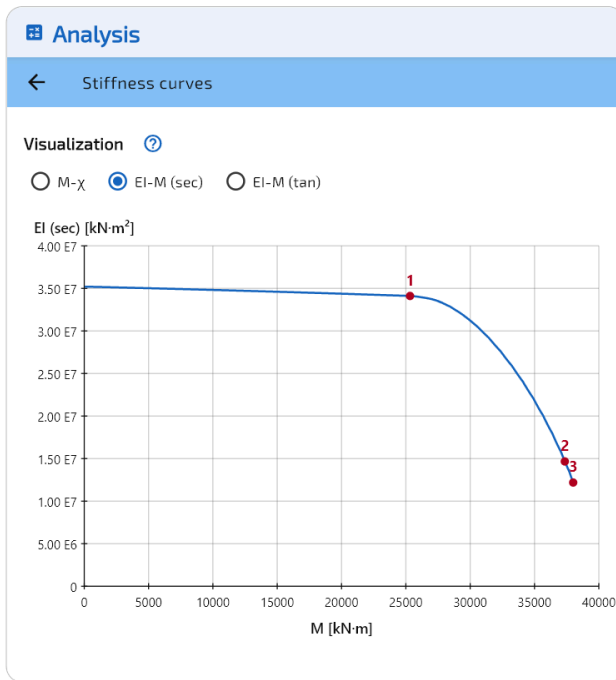


Abbildung 9: Sekantensteifigkeit  $EI_{sec}$ .

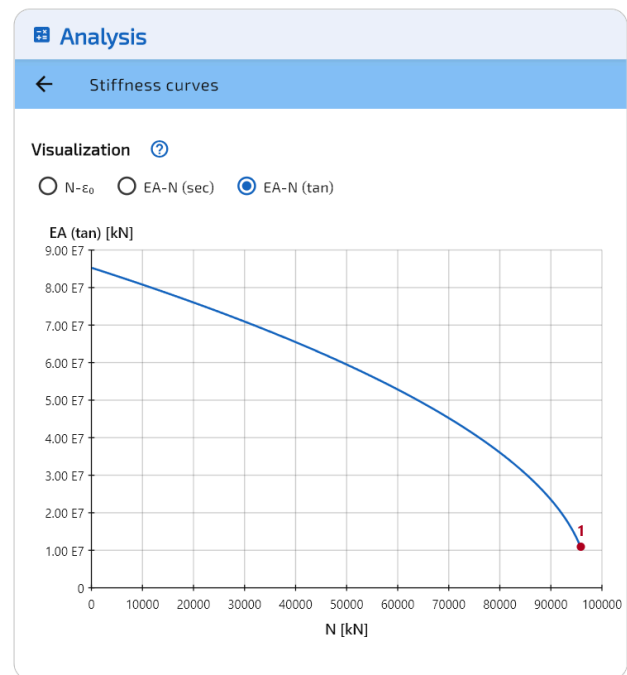


Abbildung 10: Axialsteifigkeit  $EA$ .

Die Sekantensteifigkeit nimmt allmählich ab: nur 3% Abfall bei Ereignis #1 (Stahlfließen). Nach Ereignis #2 (Beton-Plateau) wird die Kurve steiler; beim Versagen verbleiben ca. 35% der Anfangssteifigkeit. Der geringere relative Abfall gegenüber dem Rechteck (65% vs. 89%) ist typisch für Hohlquerschnitte mit hohem Bewehrungsgrad.

## Steifigkeitsereignisse ( $M-\chi$ )

#	Material	$\varepsilon_c / \varepsilon_s$ (‰)	$\chi_y$ (‰)	$M_y$ (kN·m)	$EI_{sec}$ (kN·m <sup>2</sup> )	$EI_{tan}$ (kN·m <sup>2</sup> )
1	Stahl	2.174	0.742	25 324	3.411E7	3.244E7
2	Beton	-2.000	2.547	37 356	1.466E7	1.439E6
3	Stahl	10.000	3.119	38 006	1.219E7	9.154E5

Ereignis #1: Stahlfließen ( $\varepsilon_s = 2\{, \}174$  ‰). Ereignis #2: plastisches Plateau des Betons ( $\varepsilon_{c2} = 2\{, \}000$  ‰). Ereignis #3: Stahlbruch bei  $\varepsilon_{ud} = 10\{, \}0$  ‰ (Bemessungsbruchdehnung nach BAEL), beendet die Kurve. Anders als beim Rechteck, wo Betondruckbruch ( $\varepsilon_{cu2}$ ) maßgebend war, versagt dieser Querschnitt durch Stahlbruch – je nach Geometrie und Bewehrung werden unterschiedliche Ereignisse ausgelöst.

# Leistungsbenchmark

Diskretisierungspunkte	Rechteck EC2 (ms)	Oblong BAEI (ms)
100	5.2	6.5
500	15.5	11.3
1 000 (Standard)	17.3	19.5
5 000	61.0	60.9

Die Berechnung ist praktisch instantan: Selbst bei 5 000 Punkten liegen beide Querschnitte unter 61 ms.

# Export

SectionPro exportiert die Kurvenwerte als PDF, TXT und XLS zur Weiterverwendung. Der PDF-Export enthält auch Kurvenvisualisierungen.

**STIFFNESS CURVES CALCULATION RESULTS**  
GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-04-02 19:39

**Events**  
Events correspond to special situations during the gradual construction of the stiffness curve where a material (concrete or steel) reaches an elastic or plastic deformation:

Param	Units	#1	#2	#3
Material		Steel	Concrete	Concrete
ec / es	‰	2.174	-2.000	-3.500
yz	‰	3.084	14.764	34.576
Mz	kN-m	4499.9	5393.2	5618.1
EI (sec)	kN-m <sup>2</sup>	1.459 E6	3.653 E5	1.625 E5
EI (tan)	kN-m <sup>2</sup>	1.420 E6	1.897 E4	9.451 E3

**Visualization**  
Below are the stiffness curves and associated events

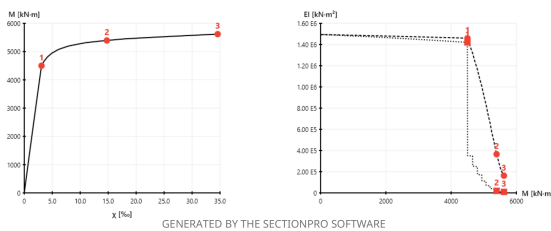


Abbildung 11: PDF-Export, Rechteckquerschnitt.

**STIFFNESS CURVES CALCULATION RESULTS**  
GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-03-31 21:03

**Events**  
Events correspond to special situations during the gradual construction of the stiffness curve where a material (concrete or steel) reaches an elastic or plastic deformation:

Param	Units	#1	#2	#3
Material		Steel	Concrete	Steel
ec / es	‰	2.174	-2.000	10.000
xy	‰	0.742	2.547	3.119
My	kN-m	25324.0	37355.6	38006.3
EI (sec)	kN-m <sup>2</sup>	3.411 E7	1.466 E7	1.219 E7
EI (tan)	kN-m <sup>2</sup>	3.244 E7	1.439 E6	9.154 E5

**Visualization**  
Below are the stiffness curves and associated events

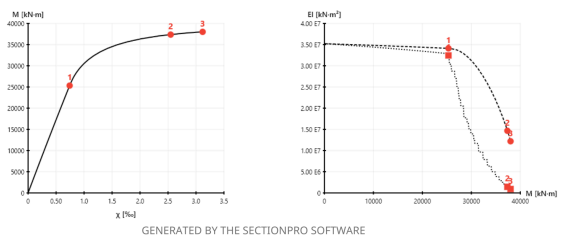


Abbildung 12: PDF-Export, Hohlquerschnitt oblong.

# Fazit

Das Steifigkeitskurvenmodul liefert den tatsächlichen Verlauf der Biege- und Axialsteifigkeit über den Lastzustand. Durch Steigerung einer Kraftkomponente von Null bis zum Versagen wird der gesamte Abbaupfad erfasst – von der elastischen Antwort über progressives Fließen bis zum Bruch – mit Krümmungen und Axialdehnungen pro Laststufe.

Die Sekanten- und Tangentensteifigkeiten ( $EI_{sec}$ ,  $EI_{tan}$ ,  $EA$ ) liefern die tatsächlichen Steifigkeitswerte für Tragwerksmodelle anstelle der konventionellen Annahme konstanter  $EI$ . Die automatisch erkannten Steifigkeitsereignisse kennzeichnen die wesentlichen Übergänge der Stoffgesetze (elastisch-plastisch, Plateau, Bruch) mit zugehörigen Kraftniveaus und Steifigkeitswerten.