



# Dimensionamento de armaduras por superfícies de interação

Tutorial SectionPro: determinação do diâmetro mínimo de armadura para um conjunto de combinações de carga utilizando o domínio de resistência 3D

BridgeKernel · 2026

## Introdução

O SectionPro oferece dois fluxos de verificação: o solver de equilíbrio da secção transversal (Artigo #3), que processa qualquer número de combinações de carga e devolve o estado detalhado de tensão/extensão para cada uma individualmente; e a verificação por superfície de interação (Artigo #5), que constrói o domínio de resistência 3D ( $N, M_z, M_y$ ) e avalia todas as cargas de uma só vez, medindo a sua distância normalizada  $\eta$  à superfície. Ambos respondem à questão de verificação: a secção é adequada para um dado  $\varphi_s$ ?

Este artigo aborda o problema inverso, o dimensionamento: dada uma disposição da armadura e um conjunto de combinações de carga, encontrar o diâmetro mínimo  $\varphi_s$  tal que todas as cargas se situem no interior da superfície de interação. O algoritmo procura o diâmetro que produz uma superfície onde a carga mais crítica atinge exatamente a fronteira ( $\eta = 1$ ), dentro de um critério de tolerância numérica. Cada estado limite é resolvido de forma independente e o SectionPro apresenta  $\varphi_s$  por estado, bem como o valor condicionante entre todos os estados.

Para o ACI 318, CSA A23.3 e AASHTO, a superfície é construída nativamente a partir do bloco de tensões de Whitney com fatores de redução de resistência. Uma vez que as cargas são avaliadas geometricamente e não por convergência iterativa, este método torna-se significativamente mais rápido para grandes envelopes de carga (ver Secção 5).

## Resultados calculados

O SectionPro apresenta três categorias de resultados:

### Dimensionamento da armadura

$\varphi_s$ : diâmetro de barra necessário  
 $A_s$ : área de aço necessária por barra  
Um resultado por estado limite  
 $\varphi_s$  condicionante entre todos os estados limite

### Distâncias e vista 3D

$\eta$ : distância normalizada por carga  
Estado: **Interno** / **Fronteira**  
Dispersão 3D na superfície final  
Uma superfície por estado limite

### Exportações

PDF: vistas 3D + tabela de dimensionamento  
XLS:  $\varphi_s$ , cargas, distâncias, estado  
TXT: resultados tabulares (colunas)

# Secção octogonal (Eurocode 2)

## Dados de entrada

A geometria da secção, a disposição da armadura e as leis dos materiais são idênticas às utilizadas nos Artigos #4 e #5. São definidas 30 combinações de carga: 15 em ULS-F (Fundamental) e 15 em SLS-C (Característica).

### Betão

- Secção transversal octogonal
- $b_1 = 2.00$  m,  $b_2 = 0.50$  m
- $h_1 = 1.00$  m,  $h_2 = 0.60$  m

### Disposição da armadura

- 48 posições de barras, espaçamento uniforme 150 mm
- Recobrimento 50 mm, 1 camada
- Diâmetro  $\varphi_s$ : a determinar

### Leis dos materiais (EC2)

- Betão C30/37:  $f_{ck} = 30$  MPa
- Aço B500B:  $f_{yk} = 500$  MPa

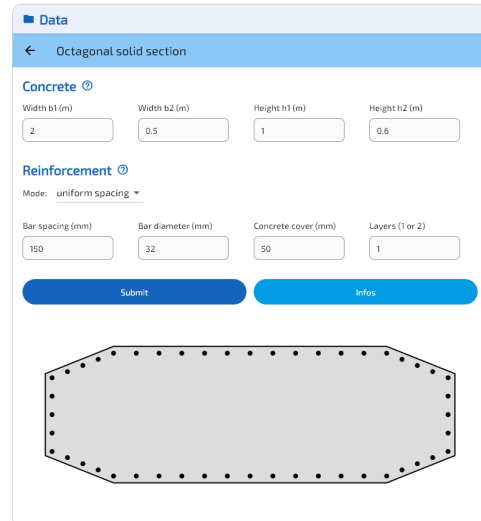


Figura 1: Secção octogonal: geometria e disposição da armadura.

## Resultados do dimensionamento

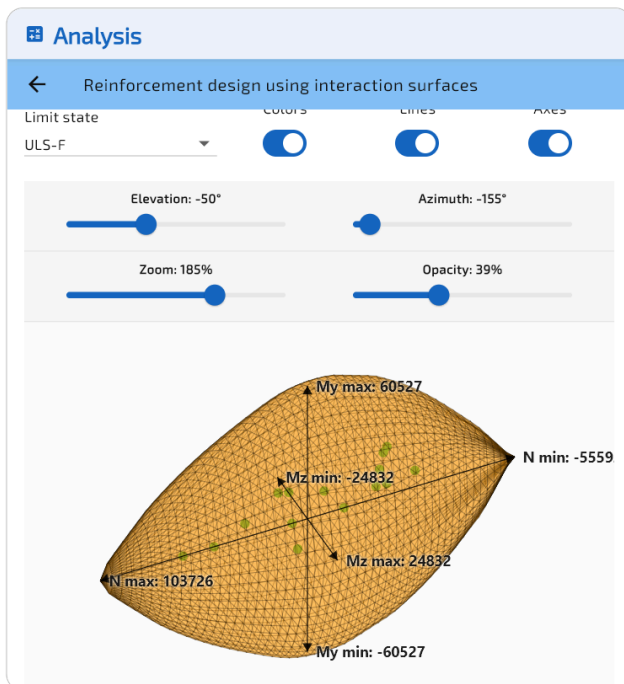


Figura 2: ULS-F: superfície de interação para  $\varphi_s$  convergido.

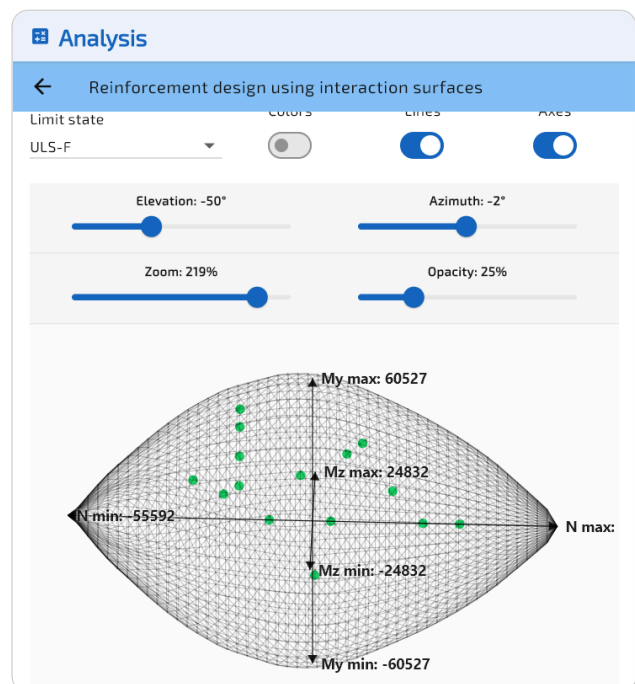


Figura 3: ULS-F, rodado.

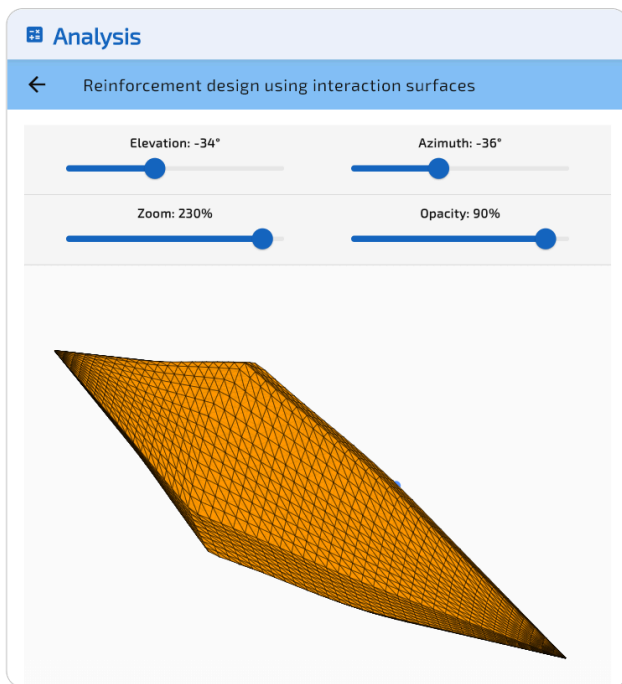


Figura 4: SLS-C: superfície de interação para  $\varphi_s$  convergido.

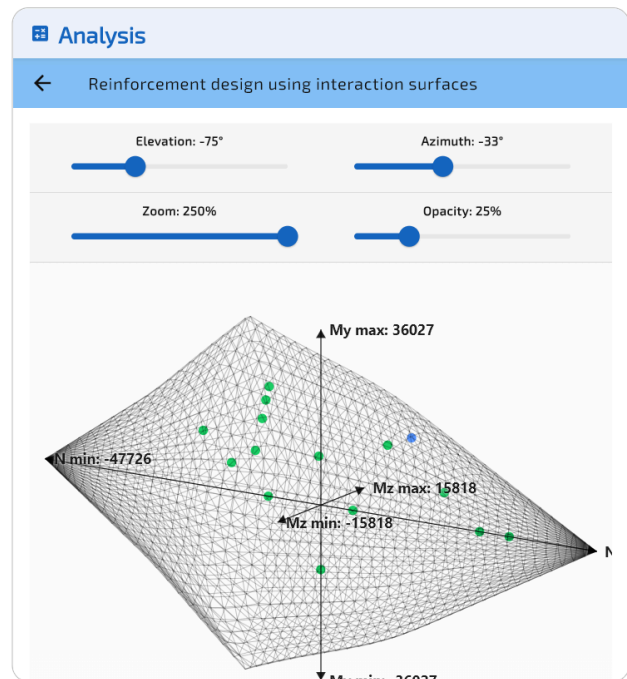


Figura 5: SLS-C, rodado.

O SLS-C é condicionante com  $\varphi_s = 56.26$  mm (vs 55.09 mm em ULS-F). Para o diâmetro condicionante, a carga de fronteira SLS-C (#26) é visível a azul na superfície, enquanto todas as cargas ULS-F são internas (verde).

Estado	$\varphi_s$ (mm)	$\eta_{\text{worst}}$	Carga condicionante	Estado
ULS-F	55.09	0.970	#8	Interno
SLS-C	56.26	1.000	#26	Fronteira

## Distâncias para a armadura condicionante

Uma vez determinado o  $\varphi_s = 56.26$  mm condicionante (SLS-C controla), o SectionPro reconstrói a superfície de interação para cada estado limite com este diâmetro e calcula as distâncias para as 30 cargas. Todas as cargas devem ser Interno ( $\eta < 1$ ) ou na fronteira ( $\eta \approx 1$ ).

Carga	Estado	$N$ (kN)	$M_z$ (kN·m)	$M_y$ (kN·m)	$\eta$	Estado
26	SLS-C	35000	6000	15000	1.000	Fronteira
8	ULS-F	0	14000	35000	0.970	Interno
23	SLS-C	0	8000	20000	0.883	Interno
7	ULS-F	0	11000	30000	0.820	Interno
25	SLS-C	30000	5000	13000	0.815	Interno
22	SLS-C	0	6800	17500	0.797	Interno
28	SLS-C	-13000	4000	10000	0.796	Interno
11	ULS-F	40000	10000	25000	0.727	Interno
29	SLS-C	45000	2500	6000	0.716	Interno
4	ULS-F	72000	0	0	0.603	Interno

As restantes 20 cargas têm todas  $\eta < 0.60$ . A tabela completa pode ser exportada pelo software nos formatos PDF, TXT e XLS.

# Secção elíptica (ACI 318)

## Dados de entrada

A geometria da secção, a armadura e as leis dos materiais são idênticas às utilizadas no artigo de verificação por superfície de interação. São definidas 30 combinações de carga: 15 em ULS e 15 em SLS. O bloco de tensões de Whitney do ACI 318 é utilizado nativamente para construir a superfície de interação ULS, incluindo os fatores de redução de resistência ( $\varphi = 0.90$  controlado por tração,  $\varphi = 0.65$  controlado por compressão,  $\varphi_N = 0.80$  limite). A superfície SLS utiliza comportamento elástico linear com tensões admissíveis ( $\sigma_c = 11.5$  MPa,  $\sigma_s = 250$  MPa).

### Betão

- Secção transversal elíptica
- Largura = 3.00 m, Altura = 2.00 m

### Disposição da armadura

- 40 barras ao longo do perímetro
- Recobrimento 50 mm
- Diâmetro  $\varphi_s$ : a determinar

### Leis dos materiais (ACI 318)

- Betão:  $f'_c = 30$  MPa
- Aço:  $f_y = 500$  MPa
- Bloco de Whitney:  $\beta_1 = 0.832$

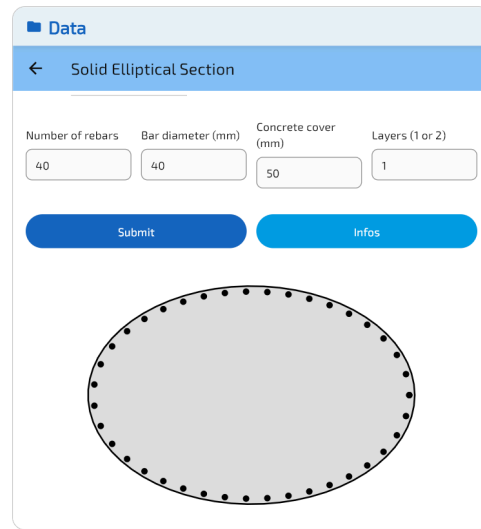


Figura 6: Secção elíptica: geometria e disposição da armadura.

## Resultados do dimensionamento

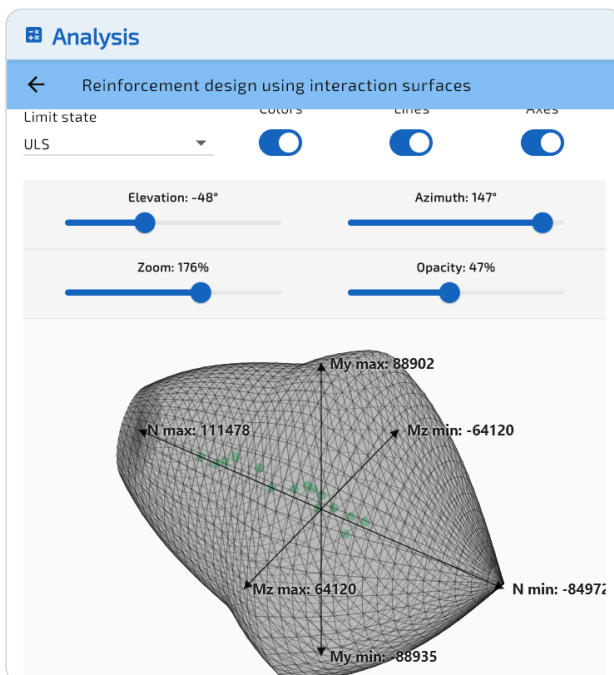


Figura 7: ULS: superfície de interação para  $\varphi_s$  convergido.

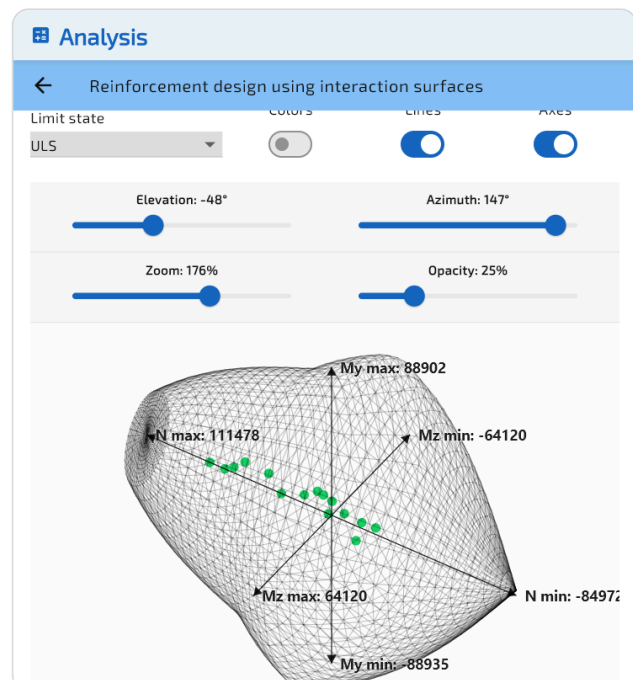


Figura 8: ULS, rodado.

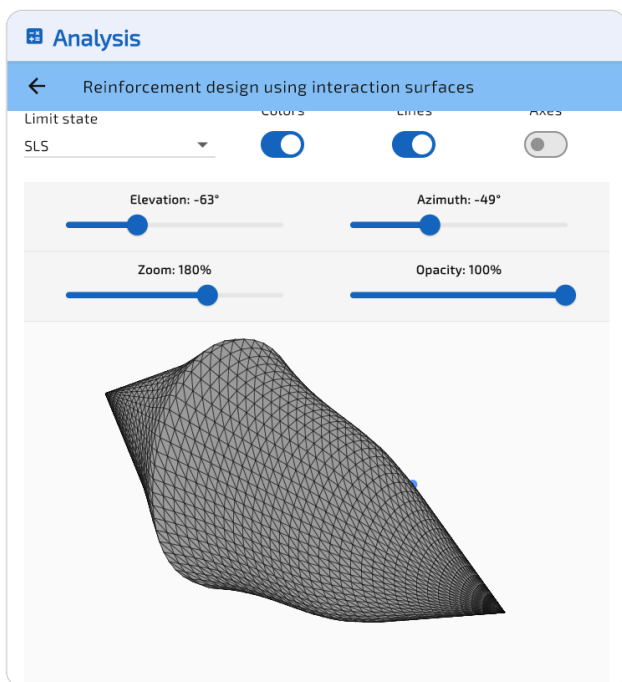


Figura 9: SLS: superfície de interação para  $\varphi_s$  convergido.

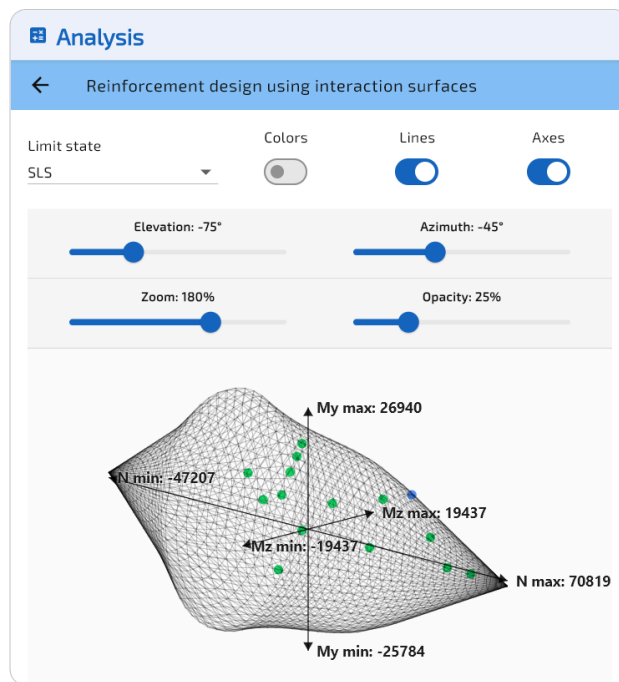


Figura 10: SLS, rodado.

O SLS é condicionante com  $\varphi_s = 77.53$  mm (vs 64.71 mm em ULS). A carga de fronteira SLS (#26) é visível a azul na superfície, enquanto todas as cargas ULS são internas (verde).

Estado	$\varphi_s$ (mm)	$\eta_{\text{worst}}$	Carga condicionante	Estado
ULS	64.71	0.781	#8	Interno
SLS	77.53	1.000	#26	Fronteira

## Distâncias para a armadura condicionante

Para o  $\varphi_s = 77.53$  mm condicionante (SLS controla), todas as 30 cargas são Interno. As 10 cargas mais críticas são:

Carga	Estado	$N$ (kN)	$M_z$ (kN·m)	$M_y$ (kN·m)	$\eta$	Estado
26	SLS	35000	7500	11000	1.000	Fronteira
23	SLS	0	10000	15000	0.866	Interno
19	SLS	60000	0	0	0.835	Interno
29	SLS	45000	3000	4500	0.812	Interno
8	ULS	0	32000	45000	0.781	Interno
25	SLS	28000	6000	9000	0.766	Interno
18	SLS	53000	0	0	0.712	Interno
11	ULS	45000	22000	33000	0.710	Interno
7	ULS	0	27000	39000	0.699	Interno
22	SLS	0	8500	12500	0.695	Interno

## Validação cruzada com a verificação por superfície de interação (Artigo #5)

A verificação por superfície de interação (Artigo #5) analisou as mesmas duas secções com diâmetros de barra fixos ( $\varphi = 32$  mm para o octógono,  $\varphi = 40$  mm para a elipse). Para esses diâmetros, várias cargas foram classificadas como Externas ( $\eta > 1$ ), significando que a capacidade da secção foi excedida. O módulo de dimensionamento (este artigo) deve portanto devolver valores de  $\varphi_s$  superiores a esses diâmetros fixos.

### Secção octogonal (EC2, $\varphi = 32$ mm fixo no Art. #5)

Com  $\varphi = 32$  mm, 7 das 15 cargas ULS-F eram Externas e 8 das 15 cargas SLS-C eram Externas. O módulo de dimensionamento devolve  $\varphi_s = 55.09$  mm (ULS-F) e  $\varphi_s = 56.26$  mm (SLS-C), ambos bem acima de 32 mm, confirmando que o diâmetro fixo era insuficiente. O diâmetro condicionante SLS-C é 76% superior ao diâmetro de verificação.

Estado limite	$\varphi$ Art.#5 (mm)	$\varphi_s$ dim. (mm)	Externas no Art.#5
ULS-F	32	55.09	7 / 15
SLS-C	32	56.26	8 / 15

### Secção elíptica (ACI 318, $\varphi = 40$ mm fixo no Art. #5)

De forma semelhante, com  $\varphi = 40$  mm, 7 das 15 cargas ULS e 8 das 15 cargas SLS eram Externas. O módulo de dimensionamento devolve  $\varphi_s = 64.71$  mm (ULS) e  $\varphi_s = 77.53$  mm (SLS). O diâmetro condicionante SLS é 94% superior ao diâmetro de verificação.

Estado limite	$\varphi$ Art.#5 (mm)	$\varphi_s$ dim. (mm)	Externas no Art.#5
ULS	40	64.71	7 / 15
SLS	40	77.53	8 / 15

Em ambos os casos, o módulo de dimensionamento devolve corretamente diâmetros que excedem o diâmetro de verificação sempre que existiam cargas externas, confirmando a plena consistência entre os fluxos de verificação e de dimensionamento.

## Validação cruzada com o solver de equilíbrio da secção transversal (Artigo #3)

O solver de equilíbrio da secção transversal (Artigo #3) calculou o  $\varphi_s$  necessário para casos de carga individuais numa secção hexagonal maciça (EC2, C30/37, 30 barras, espaçamento 150 mm). Foram analisados dois casos de carga em ULS-F: uma flexão biaxial composta e um caso de flexão uniaxial. Executando o módulo de dimensionamento na mesma secção com estas duas cargas como envelope, o  $\varphi_s$  condicionante deve corresponder ao maior diâmetro encontrado pelo solver direto.

## Secção hexagonal, envelope de duas cargas

Carga	$N$ (kN)	$M_z$ (kN·m)	$M_y$ (kN·m)	$\varphi_s^{\text{NR}}$ (mm)	$\varphi_s^{\text{SI}}$ (mm)
ULS	2000	3000	1800	10.73	—
SLS	500	1000	0	6.40	—
Cond.				10.73	10.82

Ambos os solvers convergem para o mesmo diâmetro condicionante:  $\varphi_s = 10.73$  mm (equilíbrio) vs  $\varphi_s = 10.82$  mm (superfície de interação).

## Benchmark de desempenho

A tabela seguinte compara o tempo de cálculo na secção octogonal EC2 (5 estados limite, 48 barras), variando o número de combinações de carga de 2 a 1 000 000. As cargas são distribuídas aleatoriamente entre todos os estados limite. O solver de equilíbrio efetua uma convergência iterativa por carga. O método da superfície de interação constrói a superfície e avalia todas as cargas geometricamente.

Cargas	Solver direto (ms)	Dim. SI (ms)	Aceleração
2	2.1	154	0.01 ×
100	5.6	382	0.01 ×
1000	23	441	0.05 ×
10000	167	526	0.32 ×
100000	1688	1306	1.29 ×

Ambos os métodos apresentam desempenho semelhante em todas as escalas, sendo o solver de equilíbrio mais rápido para envelopes pequenos e o método da superfície de interação a aproximar-se por volta de 100000 cargas. Os valores de  $\varphi_s$  concordam dentro de 0.1% em todas as escalas. A vantagem prática da abordagem por superfície de interação não é a velocidade bruta, mas o resultado visual: o gráfico de dispersão 3D na superfície condicionante proporciona uma confirmação imediata de que todas as cargas estão englobadas, o que o solver de equilíbrio não fornece.

## Conclusão

O dimensionamento por superfície de interação oferece uma forma eficiente de determinar o diâmetro mínimo de armadura para um envelope completo de cargas:

- Uma execução, todas as cargas: o algoritmo processa qualquer número de combinações de carga numa única passagem.
- Whitney nativo para normas americanas: para o ACI 318, CSA A23.3 e AASHTO, a superfície é construída diretamente a partir do bloco de tensões de Whitney com fatores de redução de resistência.
- Validação cruzada: os resultados do dimensionamento correspondem à verificação por superfície de interação (Artigo #5: cargas que eram Externas para o diâmetro fixo exigem agora um  $\varphi_s$  maior) e ao solver de equilíbrio da secção transversal (Artigo #3: ambos os métodos convergem para o mesmo diâmetro condicionante dentro da tolerância numérica).
- Confirmação visual: o gráfico de dispersão 3D para o  $\varphi_s$  condicionante mostra imediatamente que todas as cargas estão englobadas, com a carga crítica na fronteira.

- Complementar ao solver de equilíbrio: o solver de equilíbrio devolve o estado completo de tensão/ extensão, enquanto o método da superfície de interação proporciona uma verificação visual do envelope com custo computacional semelhante.

## Exportação

O SectionPro exporta os resultados do dimensionamento nos formatos PDF, TXT e XLS. O relatório PDF inclui vistas 3D da superfície de interação final com os pontos de carga dispersos e uma tabela de resultados.

### Reinforcement design based on IS

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-03-28 07:17

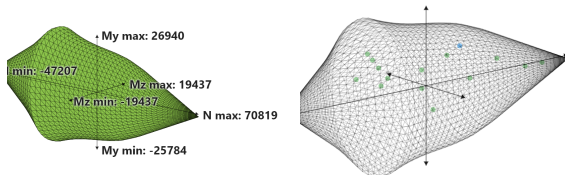
Minimum reinforcement diameters  $\phi_s$  for each limit state:

State	SLS	ULS
$\phi_s$ (mm)	77.53	64.71
Load	#26	#8

The calculation performed allows dimensioning the reinforcement diameters such that the reinforced concrete section strictly satisfies the resistance requirements with respect to the given loads.

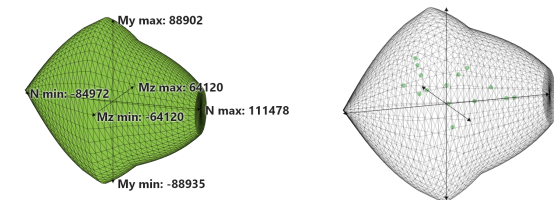
SLS : Serviceability limit state ( $\phi_s = 77.53$  mm)

14 loads are internal to the N-Mz-My surface. Scattered in green  
0 loads are external to the N-Mz-My surface. Scattered in red  
1 load is on the boundary of the N-Mz-My surface. Scattered in blue



ULS : Ultimate limit state ( $\phi_s = 64.71$  mm)

15 loads are internal to the N-Mz-My surface. Scattered in green  
0 loads are external to the N-Mz-My surface. Scattered in red  
0 loads are on the boundary of the N-Mz-My surface. Scattered in blue



GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

Figura 11: Exportação PDF página 1: vistas 3D.

### Distances of loads to surface

Load case #26 is the most unfavorable

Distances are calculated considering the largest calculated  $\phi_s$ .

Load	Limit state	N (kN)	Mz (kN-m)	My (kN-m)	SF	Status
26	SLS	35000.0	7500.0	11000.0	1.000	Boundary
23	SLS	0.0	10000.0	15000.0	0.866	Internal
19	SLS	60000.0	0.0	0.0	0.835	Internal
29	SLS	45000.0	3000.0	4500.0	0.812	Internal
8	ULS	0.0	32000.0	45000.0	0.781	Internal
25	SLS	28000.0	6000.0	9000.0	0.766	Internal
18	SLS	53000.0	0.0	0.0	0.712	Internal
11	ULS	45000.0	22000.0	33000.0	0.710	Internal
7	ULS	0.0	27000.0	39000.0	0.699	Internal
22	SLS	0.0	8500.0	12500.0	0.695	Internal
13	ULS	-20000.0	15000.0	20000.0	0.647	Internal
28	SLS	-11000.0	5000.0	7500.0	0.620	Internal
6	ULS	0.0	20000.0	30000.0	0.587	Internal
4	ULS	78000.0	0.0	0.0	0.539	Internal
10	ULS	35000.0	18000.0	28000.0	0.521	Internal
21	SLS	0.0	6500.0	9500.0	0.492	Internal
30	SLS	8000.0	-5000.0	-8000.0	0.490	Internal
15	ULS	10000.0	-15000.0	-25000.0	0.472	Internal
12	ULS	-8000.0	8000.0	12000.0	0.470	Internal
5	ULS	0.0	10000.0	15000.0	0.434	Internal
3	ULS	70000.0	0.0	0.0	0.429	Internal
24	SLS	15000.0	4000.0	6000.0	0.407	Internal
14	ULS	60000.0	8000.0	12000.0	0.398	Internal
27	SLS	-4000.0	2500.0	3500.0	0.375	Internal
20	SLS	0.0	4000.0	5000.0	0.367	Internal

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

Figura 12: Exportação PDF página 2: tabela de resultados.