



Wymiarowanie zbrojenia na podstawie powierzchni interakcji

Poradnik SectionPro: wyznaczanie minimalnego zbrojenia dla zestawu kombinacji obciążeń z wykorzystaniem trójwymiarowej dziedziny nośności

BridgeKernel · 2026

Wprowadzenie

SectionPro oferuje dwa tryby weryfikacji: solver równowagi przekroju (Artykuł #3), który przetwarza dowolną liczbę kombinacji obciążeń i zwraca szczegółowy stan naprężeń/odkształceń dla każdej z nich osobno; oraz weryfikację za pomocą powierzchni interakcji (Artykuł #5), która buduje trójwymiarową dziedzinę nośności (N, M_z, M_y) i ocenia wszystkie obciążenia jednocześnie, mierząc ich znormalizowaną odległość η do powierzchni. Oba podejścia odpowiadają na pytanie weryfikacyjne: czy przekrój jest wystarczający dla danego φ_s ?

Niniejszy artykuł dotyczy problemu odwrotnego, wymiarowania: dla danego rozmieszczenia zbrojenia i zestawu kombinacji obciążeń, znaleźć minimalną średnicę prętów φ_s taką, aby każde obciążenie znajdowało się wewnątrz powierzchni interakcji. Algorytm wyszukuje średnicę, dla której powierzchnia jest taka, że najbardziej krytyczne obciążenie trafia dokładnie na granicę ($\eta = 1$), z dokładnością do przyjętego kryterium tolerancji numerycznej. Każdy stan graniczny jest rozwiązywany niezależnie, a SectionPro podaje φ_s dla każdego stanu oraz wartość miarodajną spośród wszystkich stanów.

Dla ACI 318, CSA A23.3 i AASHTO powierzchnia jest budowana bezpośrednio z bloku naprężeń Whitney ze współczynnikami redukcji nośności. Ponieważ obciążenia są oceniane geometrycznie, a nie przez zbieżność iteracyjną, metoda ta staje się znacznie szybsza dla dużych obwiedni obciążeń (patrz Rozdział 5).

Obliczane wyniki

SectionPro przedstawia trzy kategorie wyników:

Wymiarowanie zbrojenia

φ_s : wymagana średnica pręta
 A_s : wymagane pole przekroju pręta
Jeden wynik na stan graniczny
Miarodajne φ_s spośród wszystkich stanów granicznych

Odległości i widok 3D

η : znormalizowana odległość na obciążenie
Status: **Wewnętrzny** / **Graniczny**
Wykres 3D punktów na końcowej powierzchni
Jedna powierzchnia na stan graniczny

Eksporty

PDF: widoki 3D + tabela wymiarowania
XLS: φ_s , obciążenia, odległości, status
TXT: wyniki tabelaryczne (kolumny)

Przekrój ośmiokątny (Eurocode 2)

Dane wejściowe

Geometria przekroju, rozmieszczenie zbrojenia i prawa materiałowe są identyczne jak w Artykułach #4 i #5. Zdefiniowano 30 kombinacji obciążeń: 15 w ULS-F (Podstawowy) i 15 w SLS-C (Charakterystyczny).

Beton

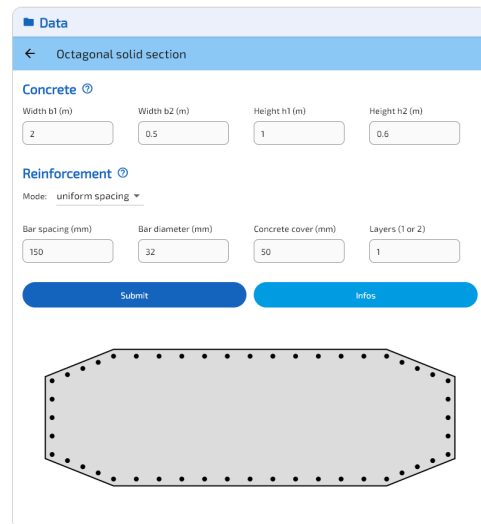
- Ośmiokątny przekrój
- $b_1 = 2\{, \}00$ m, $b_2 = 0\{, \}50$ m
- $h_1 = 1\{, \}00$ m, $h_2 = 0\{, \}60$ m

Rozmieszczenie zbrojenia

- 48 pozycji prętów, rozstaw równomierny 150 mm
- Otulina 50 mm, 1 warstwa
- Średnica φ_s : do wyznaczenia

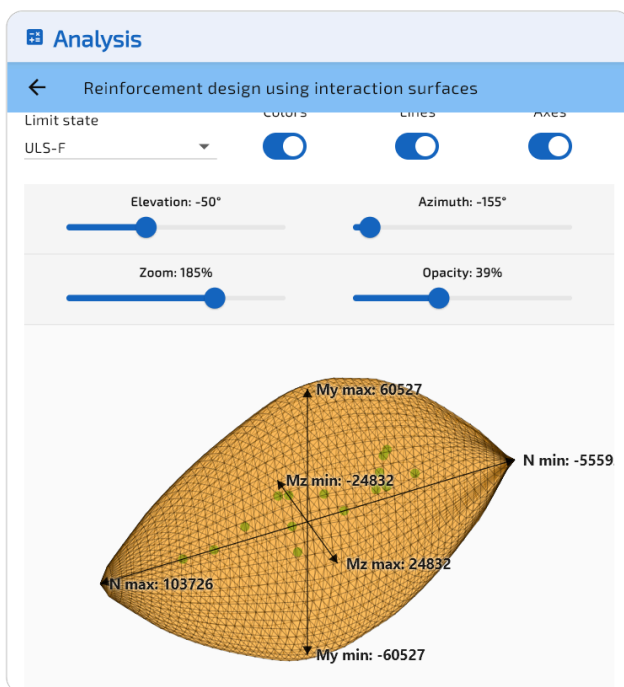
Prawa materiałowe (EC2)

- Beton C30/37: $f_{ck} = 30$ MPa
- Stal B500B: $f_{yk} = 500$ MPa

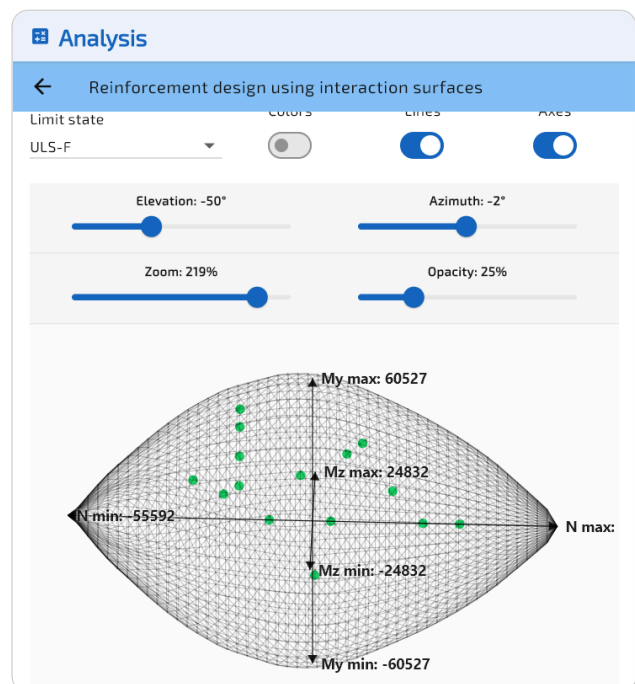


Rysunek 1: Przekrój ośmiokątny: geometria i rozmieszczenie zbrojenia.

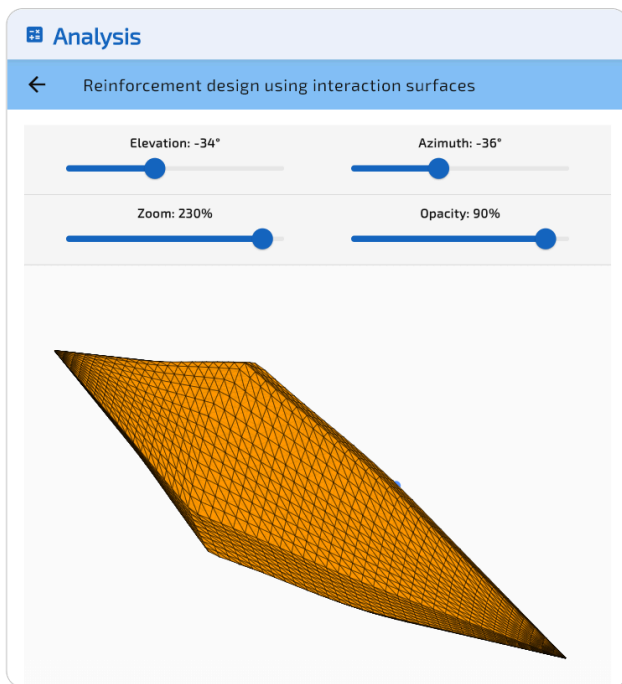
Wyniki wymiarowania



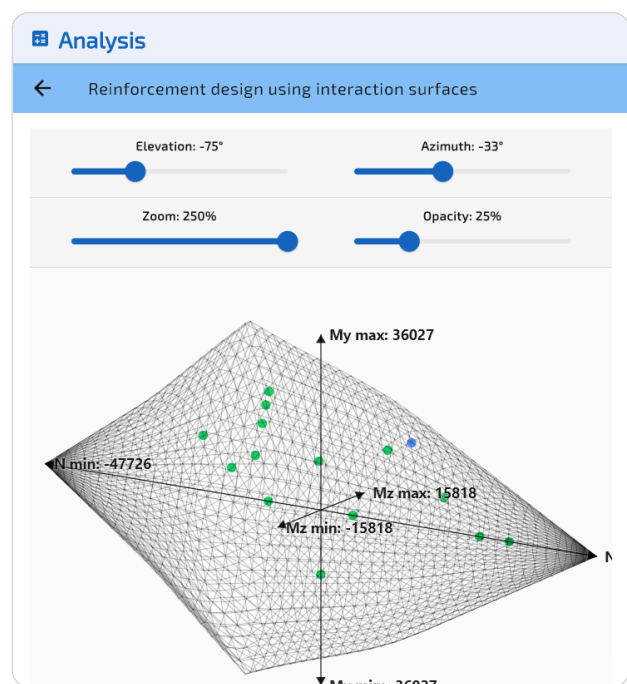
Rysunek 2: ULS-F: powierzchnia interakcji przy zbieżnym φ_s .



Rysunek 3: ULS-F, obrócony.



Rysunek 4: SLS-C: powierzchnia interakcji przy zbieżnym φ_s .



Rysunek 5: SLS-C, obrócony.

SLS-C jest miarodajny z $\varphi_s = 56\{, \}26$ mm (wobec 55,09 mm przy ULS-F). Przy miarodajnej średnicy, obciążenie graniczne SLS-C (#26) jest widoczne na niebiesko na powierzchni, podczas gdy wszystkie obciążenia ULS-F są wewnętrzne (zielone).

Stan	φ_s (mm)	η_{worsz}	Obciążenie miarodajne	Status
ULS-F	55{, }09	0{, }970	#8	Wewnętrzny
SLS-C	56{, }26	1{, }000	#26	Graniczny

Odległości przy miarodajnym zbrojeniu

Po wyznaczeniu miarodajnego $\varphi_s = 56\{, \}26$ mm (SLS-C decyduje), SectionPro odbudowuje powierzchnię interakcji dla każdego stanu granicznego przy tej średnicy i oblicza odległości dla wszystkich 30 obciążeń. Każde obciążenie musi być Wewnętrzne ($\eta < 1$) lub Graniczny ($\eta \approx 1$).

Obc.	Stan	N (kN)	M_z (kN·m)	M_y (kN·m)	η	Status
26	SLS-C	35000	6000	15000	1{, }000	Graniczny
8	ULS-F	0	14000	35000	0{, }970	Wewnętrzny
23	SLS-C	0	8000	20000	0{, }883	Wewnętrzny
7	ULS-F	0	11000	30000	0{, }820	Wewnętrzny
25	SLS-C	30000	5000	13000	0{, }815	Wewnętrzny
22	SLS-C	0	6800	17500	0{, }797	Wewnętrzny
28	SLS-C	-13000	4000	10000	0{, }796	Wewnętrzny
11	ULS-F	40000	10000	25000	0{, }727	Wewnętrzny
29	SLS-C	45000	2500	6000	0{, }716	Wewnętrzny
4	ULS-F	72000	0	0	0{, }603	Wewnętrzny

Pozostałe 20 obciążeń ma $\eta < 0\{, \}60$. Pełna tabela może być wyeksportowana przez program w formatach PDF, TXT i XLS.

Przekrój eliptyczny (ACI 318)

Dane wejściowe

Geometria przekroju, zbrojenie i prawa materiałowe są identyczne jak w artykule dotyczącym weryfikacji za pomocą powierzchni interakcji. Zdefiniowano 30 kombinacji obciążeń: 15 w ULS i 15 w SLS. Blok naprężeń Whitney wg ACI 318 jest stosowany bezpośrednio do budowy powierzchni interakcji ULS, łącznie ze współczynnikami redukcji nośności ($\varphi = 0{,}90$ sterowane rozciąganiem, $\varphi = 0{,}65$ sterowane ściskaniem, $\varphi_N = 0{,}80$ ograniczenie). Powierzchnia SLS wykorzystuje liniowo-sprężyste zachowanie z naprężeniami dopuszczalnymi ($\sigma_c = 11{,}5$ MPa, $\sigma_s = 250$ MPa).

Beton

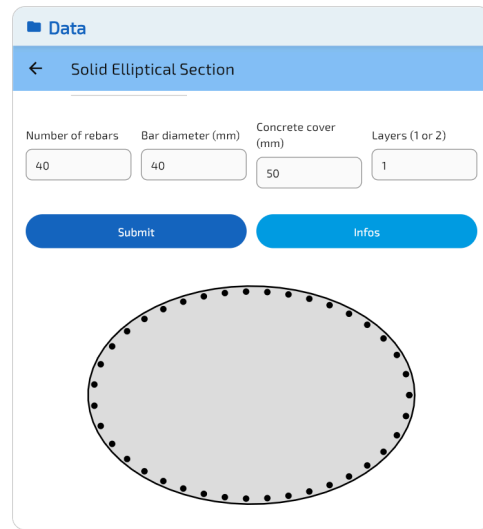
- Eliptyczny przekrój
- Szerokość = $3{,}00$ m, Wysokość = $2{,}00$ m

Rozmieszczenie zbrojenia

- 40 prętów wzdłuż obwodu
- Otulina 50 mm
- Średnica φ_s : do wyznaczenia

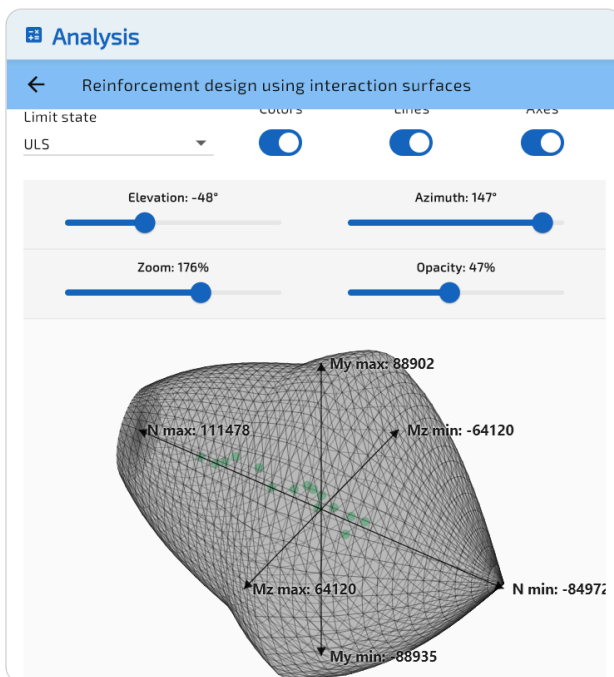
Prawa materiałowe (ACI 318)

- Beton: $f'_c = 30$ MPa
- Stal: $f_y = 500$ MPa
- Blok Whitney: $\beta_1 = 0{,}832$

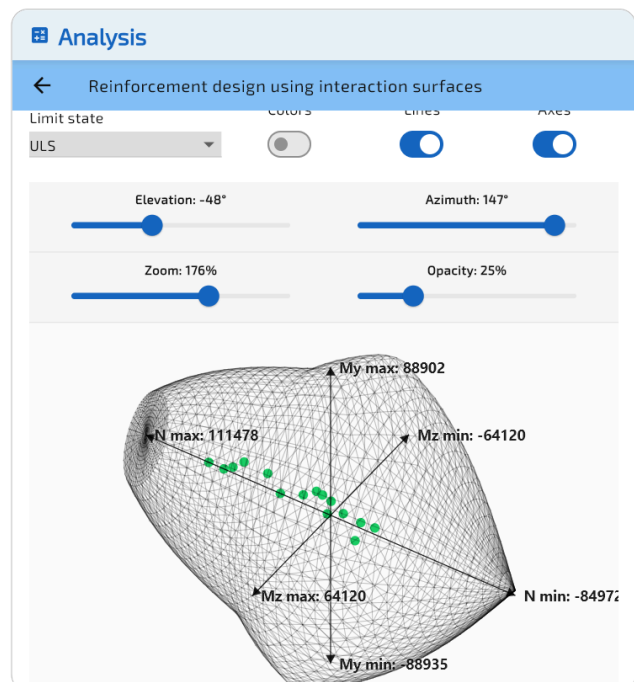


Rysunek 6: Przekrój eliptyczny: geometria i rozmieszczenie zbrojenia.

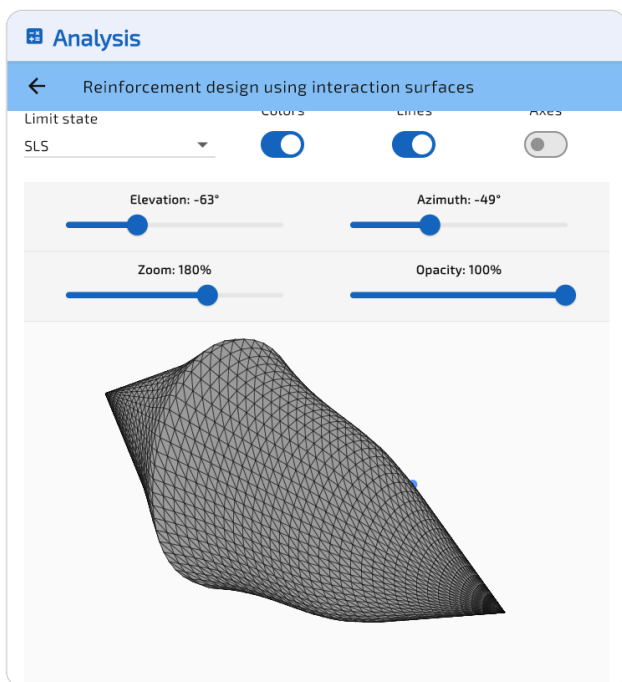
Wyniki wymiarowania



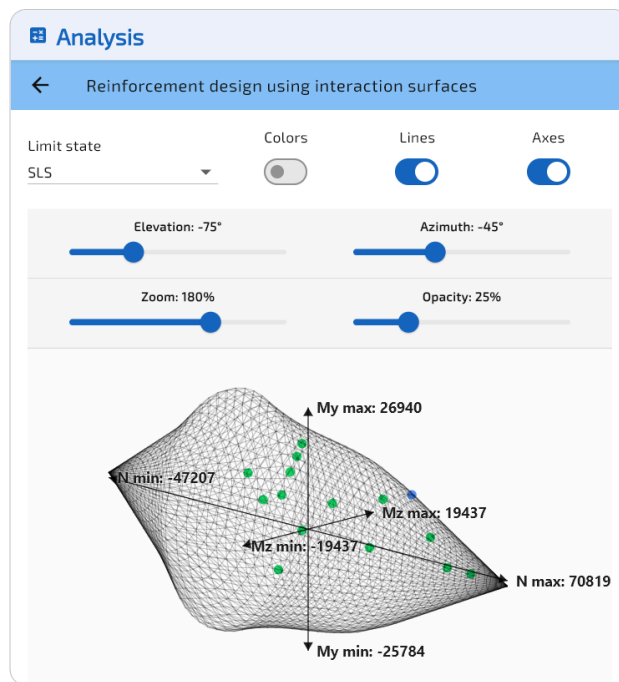
Rysunek 7: ULS: powierzchnia interakcji przy zbieżnym φ_s .



Rysunek 8: ULS, obrócony.



Rysunek 9: SLS: powierzchnia interakcji przy zbieżnym φ_s .



Rysunek 10: SLS, obrócony.

SLS jest miarodajny z $\varphi_s = 77\{\}, 53$ mm (wobec 64,71 mm przy ULS). Obciążenie graniczne SLS (#26) jest widoczne na niebiesko na powierzchni, podczas gdy wszystkie obciążenia ULS są wewnętrzne (zielone).

Stan	φ_s (mm)	η_{worsz}	Obciążenie miarodajne	Status
ULS	64{\}, 71	0{\}, 781	#8	Wewnętrzny
SLS	77{\}, 53	1{\}, 000	#26	Graniczny

Odległości przy miarodajnym zbrojeniu

Przy miarodajnym $\varphi_s = 77\{\}, 53$ mm (SLS decyduje), wszystkie 30 obciążeń jest Wewnętrznych. 10 najbardziej krytycznych obciążeń:

Obc.	Stan	N (kN)	M_z (kN·m)	M_y (kN·m)	η	Status
26	SLS	35000	7500	11000	1{\}, 000	Graniczny
23	SLS	0	10000	15000	0{\}, 866	Wewnętrzny
19	SLS	60000	0	0	0{\}, 835	Wewnętrzny
29	SLS	45000	3000	4500	0{\}, 812	Wewnętrzny
8	ULS	0	32000	45000	0{\}, 781	Wewnętrzny
25	SLS	28000	6000	9000	0{\}, 766	Wewnętrzny
18	SLS	53000	0	0	0{\}, 712	Wewnętrzny
11	ULS	45000	22000	33000	0{\}, 710	Wewnętrzny
7	ULS	0	27000	39000	0{\}, 699	Wewnętrzny
22	SLS	0	8500	12500	0{\}, 695	Wewnętrzny

Walidacja krzyżowa z weryfikacją powierzchni interakcji (Artykuł #5)

Weryfikacja za pomocą powierzchni interakcji (Artykuł #5) analizowała te same dwa przekroje ze stałymi średnicami prętów ($\varphi = 32$ mm dla ośmiokąta, $\varphi = 40$ mm dla elipsy). Przy tych średnicach kilka obciążeń zostało sklasyfikowanych jako Zewnętrzne ($\eta > 1$), co oznacza, że nośność przekroju została przekroczona. Moduł wymiarowania (niniejszy artykuł) musi zatem zwrócić wartości φ_s większe niż te stałe średnice.

Przekrój ośmiokątny (EC2, stałe $\varphi = 32$ mm w Art. #5)

Przy $\varphi = 32$ mm, 7 z 15 obciążeń ULS-F było Zewnętrznych i 8 z 15 obciążeń SLS-C było Zewnętrznych. Moduł wymiarowania zwraca $\varphi_s = 55\{, \}09$ mm (ULS-F) i $\varphi_s = 56\{, \}26$ mm (SLS-C), obie wartości znacznie powyżej 32 mm, co potwierdza, że stała średnica była niewystarczająca. Miarodajna średnica SLS-C jest o 76% większa niż średnica weryfikacyjna.

Stan graniczny	φ Art.#5 (mm)	φ_s wym. (mm)	Zewnętrzne w Art.#5
ULS-F	32	55{, }09	7 / 15
SLS-C	32	56{, }26	8 / 15

Przekrój eliptyczny (ACI 318, stałe $\varphi = 40$ mm w Art. #5)

Analogicznie, przy $\varphi = 40$ mm, 7 z 15 obciążeń ULS i 8 z 15 obciążeń SLS było Zewnętrznych. Moduł wymiarowania zwraca $\varphi_s = 64\{, \}71$ mm (ULS) i $\varphi_s = 77\{, \}53$ mm (SLS). Miarodajna średnica SLS jest o 94% większa niż średnica weryfikacyjna.

Stan graniczny	φ Art.#5 (mm)	φ_s wym. (mm)	Zewnętrzne w Art.#5
ULS	40	64{, }71	7 / 15
SLS	40	77{, }53	8 / 15

W obu przypadkach moduł wymiarowania prawidłowo zwraca średnice przekraczające średnicę weryfikacyjną, gdy obecne były obciążenia zewnętrzne, co potwierdza pełną spójność między trybami weryfikacji i wymiarowania.

Walidacja krzyżowa z solverem równowagi przekroju (Artykuł #3)

Solver równowagi przekroju (Artykuł #3) obliczył wymagane φ_s dla pojedynczych przypadków obciążenia na pełnym przekroju sześciokątnym (EC2, C30/37, 30 prętów, rozstaw 150 mm). Przeanalizowano dwa przypadki obciążeń w ULS-F: obciążenie dwuosiove złożone oraz przypadek zginania jednoosiowego. Uruchomienie modułu wymiarowania na tym samym przekroju z tymi dwoma obciążeniami jako obwiednią daje miarodajne φ_s , które musi odpowiadać największej średnicy wyznaczonej przez solver bezpośrednio.

Przekrój sześciokątny, obwiednia dwóch obciążeń

Obc.	N (kN)	M_z (kN·m)	M_y (kN·m)	φ_s^{NR} (mm)	φ_s^{SI} (mm)
ULS	2000	3000	1800	10{, }73	—
SLS	500	1000	0	6{, }40	—
Miar.				10,73	10,82

Oba solvery zbiegają do tej samej miarodajnej średnicy: $\varphi_s = 10{, }73$ mm (równowaga) vs $\varphi_s = 10{, }82$ mm (powierzchnia interakcji).

Benchmark wydajności

Poniższa tabela porównuje czas obliczeń na ośmiokątnym przekroju EC2 (5 stanów granicznych, 48 prętów), skalując liczbę kombinacji obciążeń od 2 do 1 000 000. Obciążenia są losowo rozłożone pomiędzy wszystkie stany graniczne. Solver równowagi wykonuje jedną zbieżność iteracyjną na obciążenie. Metoda powierzchni interakcji buduje powierzchnię i ocenia wszystkie obciążenia geometrycznie.

Obciążenia	Solver bezpośredni (ms)	Wymiarowanie SI (ms)	Przyspieszenie
2	2{, }1	154	0{, }01 ×
100	5{, }6	382	0{, }01 ×
1000	23	441	0{, }05 ×
10000	167	526	0{, }32 ×
100000	1688	1306	1{, }29 ×

Obie metody zapewniają zbliżoną wydajność we wszystkich skalach, przy czym solver równowagi jest szybszy dla małych obwiedni, a metoda powierzchni interakcji dorównuje mu przy około 100000 obciążeniach. Wartości φ_s są zgodne z dokładnością do 0,1% we wszystkich skalach. Praktyczna zaleta podejścia opartego na powierzchni interakcji nie polega na surowej szybkości, lecz na wizualnym wyniku: wykres 3D punktów na miarodajnej powierzchni daje natychmiastowe potwierdzenie, że wszystkie obciążenia są zawarte, czego solver równowagi nie zapewnia.

Podsumowanie

Wymiarowanie za pomocą powierzchni interakcji zapewnia efektywny sposób wyznaczania minimalnej średnicy zbrojenia dla całej obwiedni obciążeń:

- Jedno uruchomienie, wszystkie obciążenia: algorytm przetwarza dowolną liczbę kombinacji obciążeń w jednym przebiegu.
- Natywne dla norm amerykańskich z blokiem Whitney: dla ACI 318, CSA A23.3 i AASHTO powierzchnia jest budowana bezpośrednio z bloku naprężeń Whitney ze współczynnikami redukcji nośności.
- Walidacja krzyżowa: wyniki wymiarowania są zgodne z weryfikacją powierzchni interakcji (Artykuł #5: obciążenia, które były Zewnętrzne przy stałej średnicy, wymagają teraz większego φ_s) oraz z solverem równowagi przekroju (Artykuł #3: obie metody zbiegają do tej samej miarodajnej średnicy z dokładnością numeryczną).

- Potwierdzenie wizualne: wykres 3D punktów przy miarodajnym φ_s natychmiast pokazuje, że wszystkie obciążenia są zawarte, z obciążeniem krytycznym na granicy.
- Komplementarność z solverem równowagi: solver równowagi zwraca pełny stan naprężeń/odkształceń, podczas gdy metoda powierzchni interakcji zapewnia wizualną kontrolę obwiedni przy zbliżonym koszcie obliczeniowym.

Eksport

SectionPro eksportuje wyniki wymiarowania w formatach PDF, TXT i XLS. Raport PDF zawiera widoki 3D końcowej powierzchni interakcji z naniesionymi punktami obciążeń oraz tabelę wyników.

Reinforcement design based on IS

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-03-28 07:17

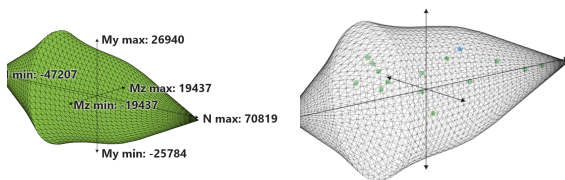
Minimum reinforcement diameters φ_s for each limit state:

State	SLS	ULS
φ_s (mm)	77.53	64.71
Load	#26	#8

The calculation performed allows dimensioning the reinforcement diameters such that the reinforced concrete section strictly satisfies the resistance requirements with respect to the given loads.

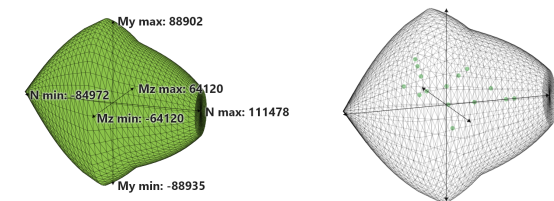
SLS : Serviceability limit state ($\varphi_s = 77.53$ mm)

14 loads are internal to the N-Mz-My surface. Scattered in green
0 loads are external to the N-Mz-My surface. Scattered in red
1 load is on the boundary of the N-Mz-My surface. Scattered in blue



ULS : Ultimate limit state ($\varphi_s = 64.71$ mm)

15 loads are internal to the N-Mz-My surface. Scattered in green
0 loads are external to the N-Mz-My surface. Scattered in red
0 loads are on the boundary of the N-Mz-My surface. Scattered in blue



GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

Rysunek 11: Eksport PDF strona 1: widoki 3D.

Distances of loads to surface

Load case #26 is the most unfavorable

Distances are calculated considering the largest calculated φ_s .

Load	Limit state	N (kN)	Mz (kN-m)	My (kN-m)	SF	Status
26	SLS	35000.0	7500.0	11000.0	1.000	Boundary
23	SLS	0.0	10000.0	15000.0	0.866	Internal
19	SLS	60000.0	0.0	0.0	0.835	Internal
29	SLS	45000.0	3000.0	4500.0	0.812	Internal
8	ULS	0.0	32000.0	45000.0	0.781	Internal
25	SLS	28000.0	6000.0	9000.0	0.766	Internal
18	SLS	53000.0	0.0	0.0	0.712	Internal
11	ULS	45000.0	22000.0	33000.0	0.710	Internal
7	ULS	0.0	27000.0	39000.0	0.699	Internal
22	SLS	0.0	8500.0	12500.0	0.695	Internal
13	ULS	-20000.0	15000.0	20000.0	0.647	Internal
28	SLS	-11000.0	5000.0	7500.0	0.620	Internal
6	ULS	0.0	20000.0	30000.0	0.587	Internal
4	ULS	78000.0	0.0	0.0	0.539	Internal
10	ULS	35000.0	18000.0	28000.0	0.521	Internal
21	SLS	0.0	6500.0	9500.0	0.492	Internal
30	SLS	8000.0	-5000.0	-8000.0	0.490	Internal
15	ULS	10000.0	-15000.0	-25000.0	0.472	Internal
12	ULS	-8000.0	8000.0	12000.0	0.470	Internal
5	ULS	0.0	10000.0	15000.0	0.434	Internal
3	ULS	70000.0	0.0	0.0	0.429	Internal
24	SLS	15000.0	4000.0	6000.0	0.407	Internal
14	ULS	60000.0	8000.0	12000.0	0.398	Internal
27	SLS	-4000.0	2500.0	3500.0	0.375	Internal
20	SLS	0.0	4000.0	5000.0	0.367	Internal

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

Rysunek 12: Eksport PDF strona 2: tabela wyników.