



# Efeitos de Segunda Ordem

Tutorial SectionPro: análise de encurvadura de pilares circulares pelo método da curvatura nominal do EC2 (uniaxial e biaxial)

BridgeKernel · 2026

## Introdução

Uma análise de segunda ordem estima a amplificação dos momentos flectores causada pela compressão a actuar sobre a deformada do pilar. A excentricidade inicial  $e_0$  provoca um deslocamento lateral que aumenta o momento, o qual aumenta ainda mais o deslocamento. O método da curvatura nominal do Eurocódigo quantifica este efeito através de  $e_2$ , derivada da curvatura  $1/r$  e do comprimento de encurvadura  $l_0$ , sem modelo MEF não linear:

$$e_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{l_0^2}{\pi^2} \quad M_{Ed} = N \cdot (e_0 + e_2) + M_1$$

O SectionPro avalia  $1/r$  por análise não linear em cada nível de carga e aplica a fórmula acima para obter  $e_2$ . O esforço normal  $N$  é incrementado, traçando um caminho de carga no diagrama de interação até à rotura do material (resistência) ou divergência de  $e_2$  (encurvadura). Dois modos:

- 2D uniaxial: encurvadura num plano ( $N-M_z$  ou  $N-M_y$ ); a outra componente é constante e pode impor-se  $M_1$ .
- 3D biaxial: ambos os planos amplificados simultaneamente, cada um com  $l_{k,x}$  e  $l_{k,y}$ ; caminho de carga na superfície 3D completa.

## Resultados calculados

Resultados apresentados para cada análise:

### Caminho de carga

Esforço normal de compressão  $N$  incrementado até à rotura  
Excentricidades  $e_{2,x}$ ,  $e_{2,y}$  em cada nível de carga  
Momento total  $M_{Ed}$  incluindo efeitos de segunda ordem

### Redução de capacidade

Relação entre o ponto de rotura e a intersecção com a curva  
Baseada nos limites de extensão do material  
Estado: resistência ou encurvadura  
 $e_{2,max}$  no ponto de rotura

### Exportações

PDF: caminho de carga sobre a curva/superfície de interação  
XLS e TXT: dados completos do caminho ( $N$ ,  $M_z$ ,  $M_y$ ,  $e_{2,x}$ ,  $e_{2,y}$ )

# Pilar circular maciço (esbelto)

## Dados de entrada

### Betão

- Secção transversal circular maciça
- Diâmetro  $D = 1.00$  m
- Área  $A_c = 0.785$  m<sup>2</sup>

### Armadura

- 20 varões HA25 ( $\varphi_s = 25$  mm)
- Posicionados a  $r = 447.5$  mm
- Recobrimento 40 mm — 1 camada
- $A_s = 20 \times 4.91 = 98.2$  cm<sup>2</sup>

### Leis dos materiais (EC2)

- Betão C30/37:  $f_{ck} = 30$  MPa
- Aço B500B:  $f_{yk} = 500$  MPa

The screenshot shows a software interface for defining a solid circular section. The 'Concrete' section has a diameter of 1 m. The 'Reinforcement' section is set to 'count' mode with 20 rebars, 25 mm diameter, 40 mm concrete cover, and 1 layer. A diagram below shows a circular cross-section with 20 reinforcement bars arranged in a single layer.

Figura 1: Pilar circular maciço.

## Encurvadura 2D uniaxial (plano $N-M_z$ )

O pilar tem um comprimento de encurvadura efectiva de  $l_k = 30.0$  m com uma excentricidade inicial  $e_0 = 0.10$  m e sem momento de primeira ordem ( $M_1 = 0$ ).

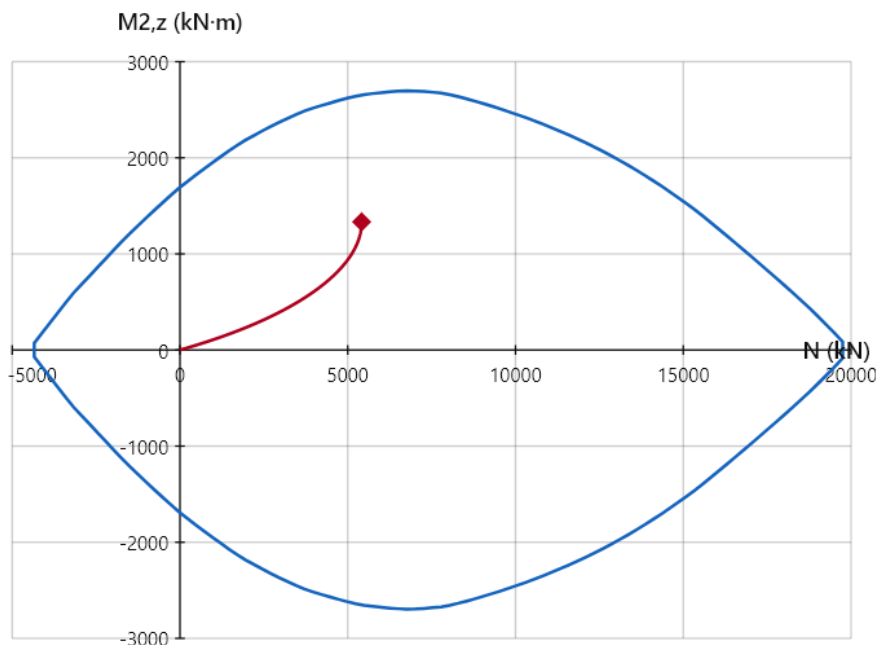


Figura 2: Caminho de carga na curva de interação  $N-M_z$ : a curvatura acentuada indica efeitos de segunda ordem significativos.

Com  $\lambda = l_k/i = 120$ , o pilar é muito esbelto. O caminho de carga é quase linear até  $N \approx 3500$  kN; para além deste ponto,  $e_2$  cresce rapidamente e o caminho curva-se acentuadamente. O pilar atinge a rotura por instabilidade em:

- $N_{crit} = 5318$  kN

- Redução de capacidade: 53%
- A 25% da resistência máxima ( $N = 5000$  kN de 20000 kN):  $M_{Ed} = 928$  kN · m, dos quais  $M_2 = 430$  kN · m de segunda ordem (46%)

Os efeitos de segunda ordem são já severos a uma fracção da capacidade axial.

## Pilar circular oco

### Dados de entrada

#### Betão

- Secção transversal circular oca
- Diâmetro exterior  $D_{ext} = 2.50$  m
- Espessura da parede  $t = 0.35$  m
- Diâmetro interior  $D_{int} = 1.80$  m

#### Armadura

- 30 varões HA20 ( $\varphi_s = 20$  mm)
- Posicionados a  $r = 1200$  mm (camada exterior)
- Recobrimento 40 mm — 1 camada
- $A_s = 30 \times 3.14 = 94.2$  cm<sup>2</sup>

#### Leis dos materiais (EC2)

- Betão C30/37:  $f_{ck} = 30$  MPa
- Aço B500B:  $f_{yk} = 500$  MPa

### Encurvadura 2D uniaxial (plano $N-M_z$ )

O pilar tem um comprimento de encurvadura efectivo de  $l_k = 30.0$  m com uma excentricidade inicial  $e_0 = 0.10$  m e sem momento de primeira ordem ( $M_1 = 0$ ).

The screenshot shows a software interface for defining a hollow circular section. The 'Concrete' section has input fields for 'Outer diameter (m)' set to 2.5 and 'Wall thickness (m)' set to 0.35. The 'Reinforcement' section has a 'Mode' dropdown set to 'count', and input fields for 'Number of rebars' (30), 'Bar diameter (mm)' (20), 'Concrete cover (mm)' (40), and 'Layers (1 or 2)' (1). There are 'Submit' and 'Infos' buttons. Below the form is a diagram of a hollow circular section with reinforcement bars.

Figura 3: Pilar circular oco.

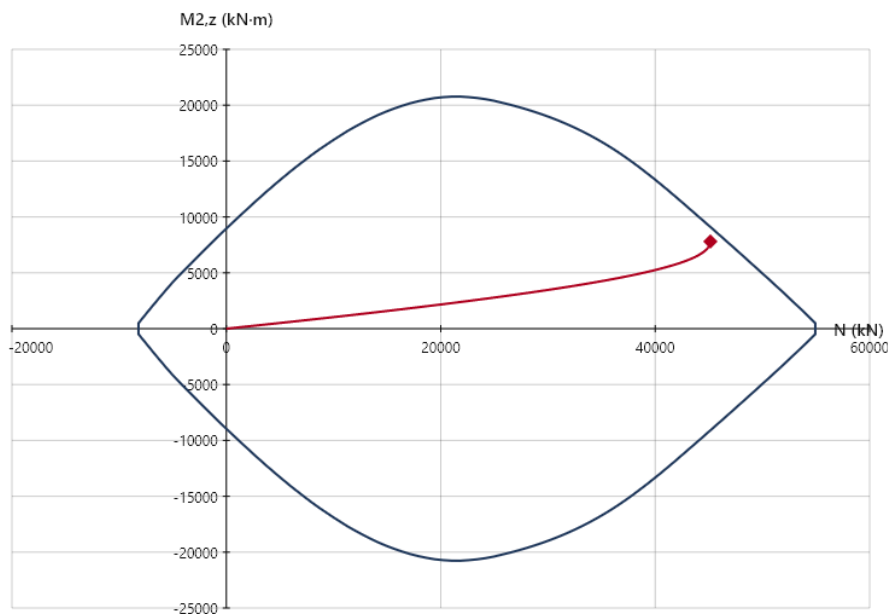


Figura 4: Caminho de carga na curva de interação  $N-M_z$ : quase linear, efeitos de segunda ordem reduzidos.

Com  $\lambda = l_k/i = 39$ , o pilar é atarracado. O caminho de carga é quase linear, mas  $e_2$  acelera para além de  $N = 35000$  kN. Esta aceleração só se manifesta próximo da resistência máxima. O pilar atinge a rotura imediatamente antes da curva de interação:

- $N_{\text{crit}} = 42154$  kN
- Redução de capacidade: 1.3%
- A 25% da resistência máxima ( $N = 13000$  kN de 51000 kN):  $M_{\text{Ed}} = 1560$  kN · m, dos quais  $M_2 = 260$  kN · m de segunda ordem (17%)

Os efeitos de segunda ordem só se tornam perceptíveis quando  $N$  se aproxima da resistência máxima.

## Encurvadura 3D biaxial

No modo 3D, o SectionPro amplifica os momentos em ambos os planos simultaneamente. Cada direcção tem o seu comprimento de encurvadura ( $l_{k,x}$ ,  $l_{k,y}$ ) e excentricidade inicial ( $e_{0,x}$ ,  $e_{0,y}$ ), e  $e_{2,x}$ ,  $e_{2,y}$  são calculadas independentemente em cada nível de carga.

O pilar oco é analisado com  $l_{k,z} = l_{k,y} = 10.0$  m e  $e_{0,z} = e_{0,y} = 0.05$  m, sem momentos de primeira ordem.

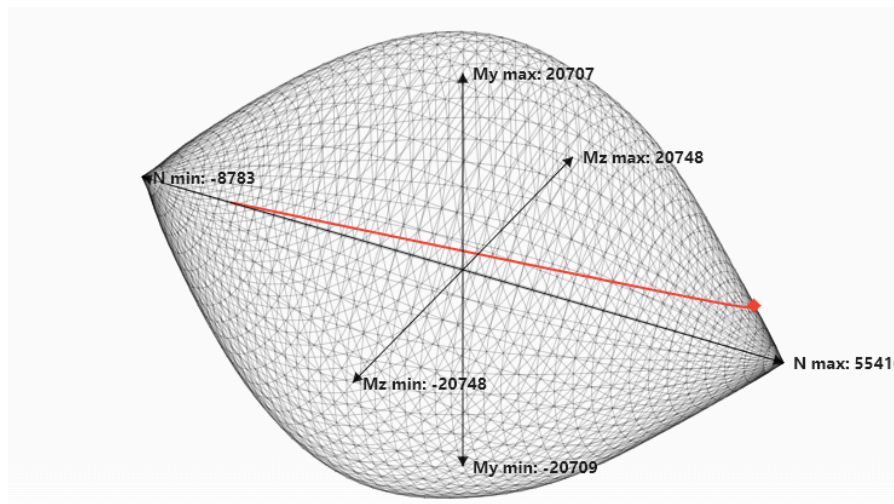


Figura 5: Caminho de carga 3D na superfície de interação.

Com  $l_k = 10$  m, os efeitos de segunda ordem são desprezáveis.  $e_2$  mantém-se inferior a 1 mm na maior parte do intervalo, atingindo apenas 7.8 mm no último ponto. O caminho de carga é essencialmente linear e alcança a superfície de interação em:

- $N_{\text{crit}} = 50903$  kN
- A 25% da resistência máxima ( $N = 12500$  kN de 51000 kN):  $M_{\text{Ed}} = 626$  kN · m por eixo, dos quais  $M_2 = 3$  kN · m de segunda ordem (0.5%)

O pilar atinge a plena resistência mecânica praticamente sem redução de capacidade, devido aos comprimentos de encurvadura reduzidos e às excentricidades iniciais menores.

# Benchmark de desempenho

A análise consiste em duas fases: construção da curva (ou superfície) de interação, seguida do traçado do caminho de carga calculando  $e_2$  incrementalmente. Cada passo avalia a curvatura da secção por um algoritmo iterativo. Tempos de cálculo para 500 pontos do caminho de carga:

Circular maciço (2D)	Circular oco (2D)	Circular oco (3D)
91 ms	252 ms	282 ms

O custo dominante é a construção da superfície de interação. O traçado do caminho acrescenta apenas alguns milissegundos, mantendo o total abaixo de 300 ms.

# Exportação

O SectionPro exporta a análise em três formatos: PDF, texto e Excel (.xlsx). Os dados incluem o caminho de carga completo ( $N$ ,  $M_z$ ,  $M_y$ ,  $e_{2,x}$ ,  $e_{2,y}$ ), o factor de redução de capacidade e o estado de encurvadura.

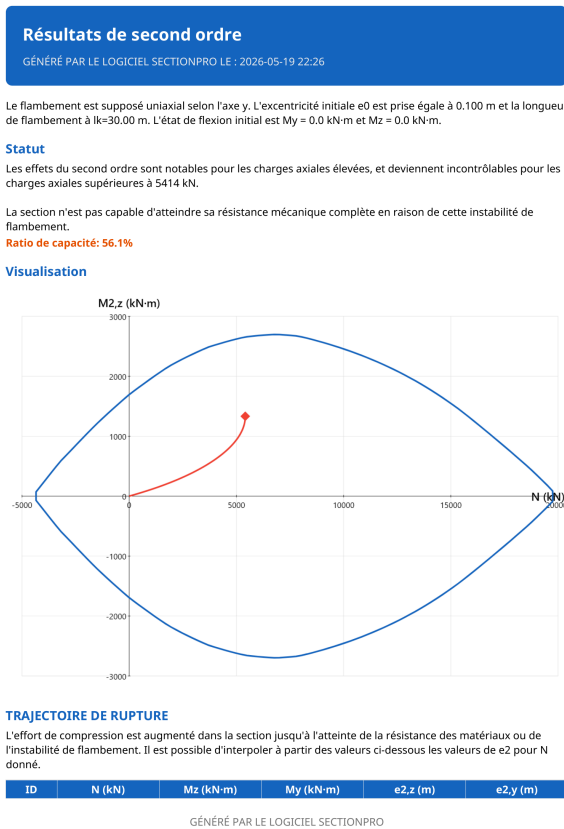


Figura 6: Exportação PDF, página 1: caminho de carga na curva de interação.

**Résultats de second ordre**  
GÉNÉRÉ PAR LE LOGICIEL SECTIONPRO LE : 2026-05-19 22:26

1	0.0	0.0	0.0	0.00000	0.00000
2	54.7	5.5	0.0	0.00042	0.00000
3	109.4	11.0	0.0	0.00085	0.00000
4	164.1	16.6	0.0	0.00128	0.00000
5	218.7	22.3	0.0	0.00172	0.00000
6	273.4	27.9	0.0	0.00216	0.00000
7	328.1	33.7	0.0	0.00261	0.00000
8	382.8	39.5	0.0	0.00306	0.00000
9	437.5	45.3	0.0	0.00352	0.00000
10	492.2	51.2	0.0	0.00398	0.00000
11	546.9	57.1	0.0	0.00445	0.00000
12	601.6	63.1	0.0	0.00492	0.00000
13	656.2	69.2	0.0	0.00540	0.00000
14	710.9	75.3	0.0	0.00588	0.00000
15	765.6	81.4	0.0	0.00637	0.00000
16	820.3	87.7	0.0	0.00687	0.00000
17	875.0	94.0	0.0	0.00737	0.00000
18	929.7	100.3	0.0	0.00788	0.00000
19	984.4	106.7	0.0	0.00839	0.00000
20	1039.1	113.2	0.0	0.00892	0.00000
21	1093.7	119.7	0.0	0.00944	0.00000
22	1148.4	126.3	0.0	0.00997	0.00000
23	1203.1	133.0	0.0	0.01051	0.00000
24	1257.8	139.7	0.0	0.01106	0.00000
25	1312.5	146.5	0.0	0.01163	0.00000
26	1367.2	153.4	0.0	0.01219	0.00000
27	1421.9	160.3	0.0	0.01276	0.00000
28	1476.6	167.3	0.0	0.01333	0.00000
29	1531.2	174.4	0.0	0.01392	0.00000
30	1585.9	181.6	0.0	0.01451	0.00000
31	1640.6	188.8	0.0	0.01511	0.00000
32	1695.3	196.2	0.0	0.01572	0.00000
33	1750.0	203.6	0.0	0.01633	0.00000
34	1804.7	211.1	0.0	0.01695	0.00000
35	1859.4	218.6	0.0	0.01759	0.00000
36	1914.1	226.3	0.0	0.01823	0.00000
37	1968.7	234.0	0.0	0.01888	0.00000
38	2023.4	241.9	0.0	0.01954	0.00000

GÉNÉRÉ PAR LE LOGICIEL SECTIONPRO

Figura 7: Exportação PDF, página 2: tabela de resultados detalhada.

## | Conclusão

O método da curvatura nominal permite avaliar os efeitos de segunda ordem ao nível da secção sem um modelo MEF não linear. A visualização do caminho de carga na curva (ou superfície) de interação mostra imediatamente a importância destes efeitos.

A comparação entre os dois pilares demonstra que as propriedades geométricas, e não apenas  $l_k$ , determinam o resultado: o pilar maciço esbelto atinge a rotura por instabilidade, enquanto o pilar oco atinge a resistência mecânica com pequena amplificação. O modo 3D biaxial estende esta análise a pilares com comprimentos de encurvadura distintos em cada direcção.