

# Efeitos de Segunda Ordem

Tutorial SectionPro: análise de flambagem de pilares circulares com o método da curvatura nominal do EC2 (uniaxial e biaxial)

BridgeKernel · 2026

## Introdução

Uma análise de segunda ordem estima a amplificação dos momentos fletores causada pela compressão atuando sobre a forma deformada do pilar. A excentricidade inicial  $e_0$  provoca um deslocamento lateral que aumenta o momento fletor, que por sua vez aumenta o deslocamento. O método da curvatura nominal do Eurocode quantifica esse efeito por meio de uma excentricidade  $e_2$  derivada da curvatura  $1/r$  e do comprimento efetivo de flambagem  $l_0$ , sem um modelo de MEF não linear:

$$e_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{l_0^2}{\pi^2} \quad M_{Ed} = N \cdot (e_0 + e_2) + M_1$$

O SectionPro avalia a curvatura  $1/r$  por análise não linear em cada nível de carga e aplica a fórmula acima para obter  $e_2$ . O esforço normal  $N$  é incrementado, traçando um caminho de carga no diagrama de interação até a capacidade do material (resistência) ou divergência da excentricidade (flambagem). Dois modos disponíveis:

- 2D uniaxial: flambagem analisada em um plano de flexão ( $N-M_z$  ou  $N-M_y$ ). A outra componente de momento é mantida constante, e um momento de primeira ordem  $M_1$  pode ser imposto.
- 3D biaxial: ambos os planos são amplificados simultaneamente, cada um com seu comprimento de flambagem  $l_{k,x}$  e  $l_{k,y}$ . O caminho de carga é traçado na superfície de interação 3D.

## Resultados calculados

O SectionPro reporta para cada análise de flambagem:

### Caminho de carga

Esforço normal de compressão  $N$  incrementado até a ruptura  
Excentricidades  $e_{2,x}$ ,  $e_{2,y}$  a cada nível de carga  
Momento total  $M_{Ed}$  incluindo efeitos de segunda ordem

### Redução de capacidade

Razão entre o ponto de ruptura e a interseção com a curva  
Baseada nos limites de deformação do material  
Status: resistência ou flambagem  
 $e_{2,max}$  no ponto de ruptura

### Exportações

PDF: caminho de carga traçado na curva/superfície de interação  
XLS e TXT: dados completos do caminho ( $N$ ,  $M_z$ ,  $M_y$ ,  $e_{2,x}$ ,  $e_{2,y}$ )

# Pilar circular maciço (esbelto)

## Dados de entrada

### Concreto

- Seção transversal circular maciça
- Diâmetro  $D = 1,00$  m
- Área  $A_c = 0,785$  m<sup>2</sup>

### Armadura

- 20 barras HA25 ( $\varphi_s = 25$  mm)
- Posicionadas em  $r = 447,5$  mm
- Cobrimento 40 mm — 1 camada
- $A_s = 20 \times 4,91 = 98,2$  cm<sup>2</sup>

### Leis dos materiais (EC2)

- Concreto C30/37:  $f_{ck} = 30$  MPa
- Aço B500B:  $f_{yk} = 500$  MPa

The screenshot shows a software interface for defining a solid circular section. The 'Concrete' section has a diameter of 1 m. The 'Reinforcement' section is set to 'count' mode with 20 bars, 25 mm diameter, 40 mm cover, and 1 layer. A circular diagram below shows the reinforcement layout.

Figura 1: Pilar circular maciço.

## Flambagem 2D uniaxial (plano $N-M_z$ )

Comprimento efetivo de flambagem  $l_k = 30,0$  m, excentricidade inicial  $e_0 = 0,10$  m, sem momento de primeira ordem ( $M_1 = 0$ ).

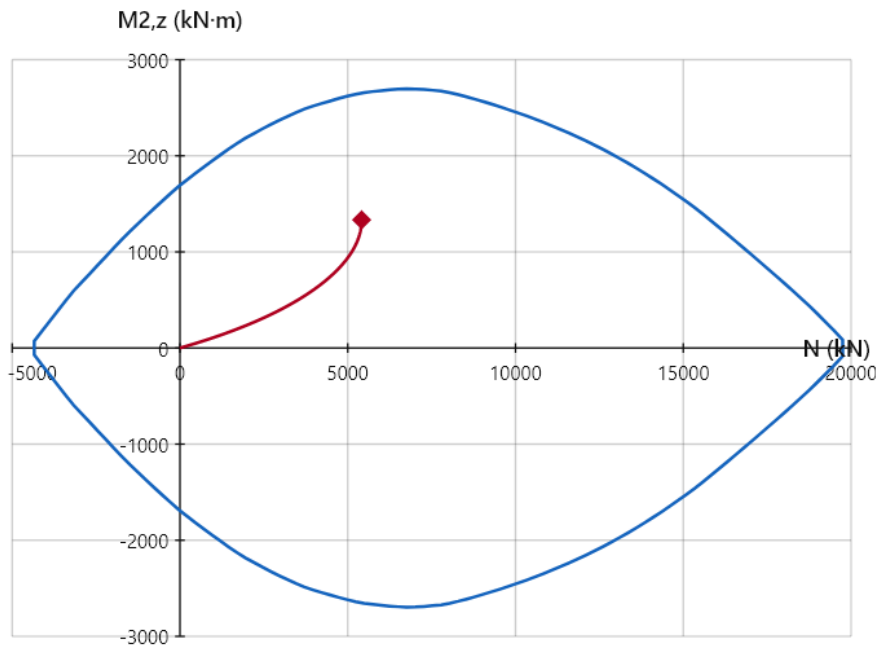


Figura 2: Caminho de carga na curva  $N-M_z$  — curvatura acentuada indica efeitos de segunda ordem significativos.

Com uma esbelteza  $\lambda = l_k/i = 120$ , este pilar é altamente esbelto. O caminho de carga é praticamente linear até  $N = 3500$  kN. Além desse ponto,  $e_2$  cresce rapidamente e o caminho curva-se para cima. O pilar rompe por instabilidade geométrica em:

- $N_{crit} = 5318$  kN
- Redução de capacidade: 53%

- A 25% da resistência máxima à compressão ( $N = 5000$  kN de 20000 kN): momento total  $M_{Ed} = 928$  kN · m, dos quais  $M_2 = 430$  kN · m são de segunda ordem (46%)

Para este pilar esbelto, os efeitos de segunda ordem já são severos numa fração da capacidade axial.

## Pilar circular vazado

### Dados de entrada

#### Concreto

- Seção transversal circular vazada
- Diâmetro externo  $D_{ext} = 2,50$  m
- Espessura da parede  $t = 0,35$  m
- Diâmetro interno  $D_{int} = 1,80$  m

#### Armadura

- 30 barras HA20 ( $\varphi_s = 20$  mm)
- Posicionadas em  $r = 1200$  mm (camada externa)
- Cobrimento 40 mm — 1 camada
- $A_s = 30 \times 3,14 = 94,2$  cm<sup>2</sup>

#### Leis dos materiais (EC2)

- Concreto C30/37:  $f_{ck} = 30$  MPa
- Aço B500B:  $f_{yk} = 500$  MPa

### Flambagem 2D uniaxial (plano $N-M_z$ )

Comprimento efetivo de flambagem  $l_k = 30,0$  m, excentricidade inicial  $e_0 = 0,10$  m, sem momento de primeira ordem ( $M_1 = 0$ ).

The screenshot shows a 'Data' window for a 'Hollow Circular Section'. Under 'Concrete', the 'Outer diameter (m)' is 2.5 and 'Wall thickness (m)' is 0.35. Under 'Reinforcement', the 'Mode' is 'count', 'Number of rebars' is 30, 'Bar diameter (mm)' is 20, 'Concrete cover (mm)' is 40, and 'Layers (1 or 2)' is 1. A 'Submit' button and an 'Infos' button are visible. Below the form is a diagram of a circular cross-section with 30 reinforcement bars arranged in a single layer.

Figura 3: Pilar circular vazado.



Figura 4: Caminho de carga na curva  $N-M_z$  — praticamente linear, efeitos de segunda ordem pequenos.

Com uma esbelteza  $\lambda = l_k/i = 39$ , este pilar é robusto. O caminho de carga é praticamente linear, mas  $e_2$  começa a acelerar além de  $N = 35000$  kN. Diferentemente do pilar esbelto, essa aceleração só

aparece quando  $N$  já está próximo da resistência máxima. O pilar rompe pouco antes de atingir a curva de interação:

- $N_{\text{crit}} = 42154 \text{ kN}$
- Redução de capacidade: 1,3%
- A 25% da resistência máxima à compressão ( $N = 13000 \text{ kN}$  de  $51000 \text{ kN}$ ): momento total  $M_{\text{Ed}} = 1560 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , dos quais  $M_2 = 260 \text{ kN} \cdot \text{m}$  são de segunda ordem (17%)

Os efeitos de segunda ordem só são perceptíveis quando  $N$  se aproxima da resistência máxima.

## Flambagem 3D biaxial

No modo 3D, o SectionPro amplifica os momentos em ambos os planos simultaneamente. Cada direção possui seu próprio comprimento de flambagem ( $l_{k,x}$ ,  $l_{k,y}$ ) e excentricidade inicial ( $e_{0,x}$ ,  $e_{0,y}$ ), e  $e_{2,x}$ ,  $e_{2,y}$  são calculadas independentemente a cada nível de carga.

O pilar vazado é analisado com comprimentos simétricos  $l_{k,z} = l_{k,y} = 10,0 \text{ m}$ ,  $e_{0,z} = e_{0,y} = 0,05 \text{ m}$ , sem momento de primeira ordem.

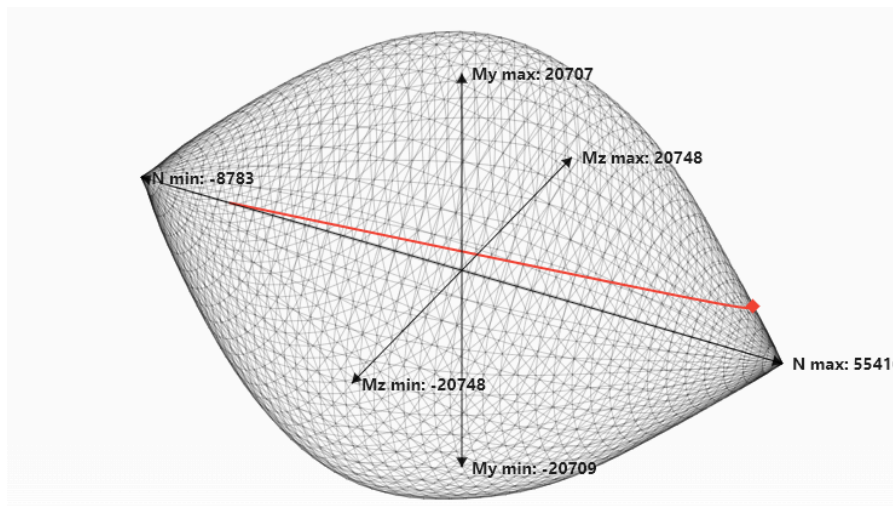


Figura 5: Caminho de carga 3D na superfície de interação.

Com um comprimento de flambagem de  $10 \text{ m}$ , os efeitos de segunda ordem são desprezíveis. A excentricidade  $e_2$  permanece abaixo de  $1 \text{ mm}$  na maior parte do intervalo e atinge apenas  $7,8 \text{ mm}$  no último ponto. O caminho de carga é linear e atinge a superfície de interação em:

- $N_{\text{crit}} = 50903 \text{ kN}$
- A 25% da resistência máxima à compressão ( $N = 12500 \text{ kN}$  de  $51000 \text{ kN}$ ): momento total  $M_{\text{Ed}} = 626 \text{ kN} \cdot \text{m}$  por eixo, dos quais  $M_2 = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$  são de segunda ordem (0,5%)

O pilar atinge sua resistência plena sem redução de capacidade significativa, devido aos comprimentos de flambagem reduzidos e às excentricidades iniciais menores.

# Benchmark de desempenho

A análise de segunda ordem consiste em duas fases: construção da curva (ou superfície) de interação, seguida do traçado do caminho de carga computando  $e_2$  incrementalmente em cada nível de carga. Cada passo avalia a curvatura da seção por um algoritmo iterativo. A tabela abaixo mostra o tempo total de cálculo para 500 pontos do caminho de carga.

| Circular maciço (2D) | Circular vazado (2D) | Circular vazado (3D) |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| 91 ms                | 252 ms               | 282 ms               |

O custo dominante é a construção da superfície de interação. O traçado do caminho acrescenta apenas alguns milissegundos, mantendo o total da análise abaixo de 300 ms.

# Exportação

O SectionPro exporta a análise de flambagem em três formatos: PDF, texto e Excel (.xlsx). Os dados exportados incluem o caminho de carga completo ( $N$ ,  $M_z$ ,  $M_y$ ,  $e_{2,x}$ ,  $e_{2,y}$  em cada nível de carga), o fator de redução de capacidade e o status de flambagem.

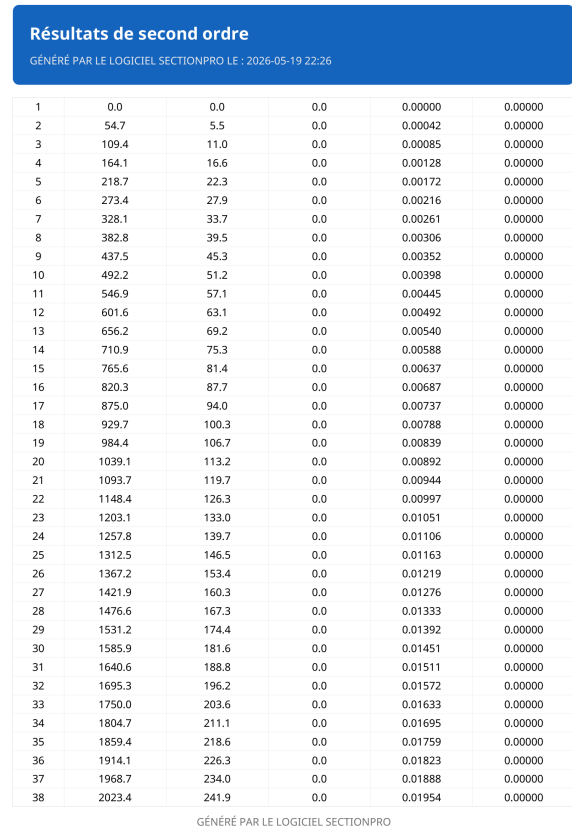
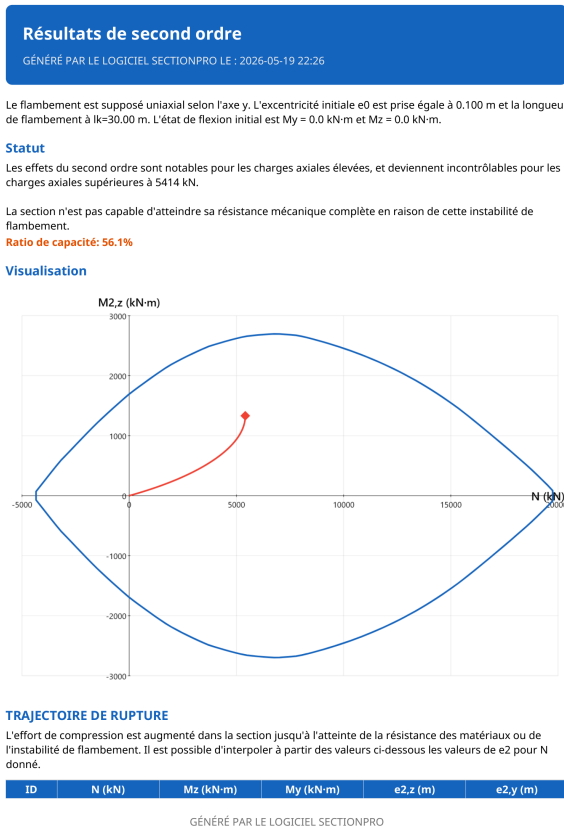


Figura 6: Exportação PDF — página 1: caminho de carga na curva de interação.

Figura 7: Exportação PDF — página 2: tabela detalhada de resultados.

## | Conclusão

O método da curvatura nominal permite avaliar os efeitos de segunda ordem ao nível da seção sem a complexidade de um modelo de MEF não linear. A visualização do caminho de carga na curva (ou superfície) de interação fornece uma avaliação imediata da importância dos efeitos de segunda ordem para um dado pilar.

A comparação entre o pilar maciço de  $\varnothing 1$  m e o pilar vazado de  $\varnothing 2,5$  m demonstra que as propriedades geométricas, e não apenas o comprimento de flambagem, governam o resultado. O pilar maciço esbelto apresenta um caminho de carga fortemente curvado e rompe por instabilidade, enquanto o pilar vazado atinge sua capacidade resistente com pequena amplificação de segunda ordem.

O modo 3D biaxial estende esta análise a pilares com comprimentos de flambagem diferentes em cada direção, amplificando os momentos independentemente em ambos os planos.