

Efekty drugiego rzędu

Poradnik SectionPro: analiza wyboczeniowa słupów kolowych
metoda nominalnej krzywizny wg EC2 (zginanie jedno- i dwuosiowe)

BridgeKernel · 2026

Wprowadzenie

Analiza drugiego rzędu szacuje przyrost momentów zginających wywołany działaniem siły ściskającej na odkształcony kształt słupa. Początkowy mimośród e_0 wywołuje wygięcie boczne, które zwiększa moment zginający, a ten dalej zwiększa wygięcie. Metoda nominalnej krzywizny wg Eurokodu wyznacza ten efekt poprzez mimośród drugiego rzędu e_2 wyprowadzony z krzywizny $1/r$ i długości wyboczeniowej l_0 , bez pełnego nieliniowego modelu MES:

$$e_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{l_0^2}{\pi^2} \quad M_{Ed} = N \cdot (e_0 + e_2) + M_1$$

SectionPro wyznacza krzywiznę $1/r$ z analizy nieliniowej na każdym poziomie obciążenia, a następnie stosuje wzór Eurokodu do obliczenia e_2 . Siła osiowa N jest zwiększana, wyznaczając ścieżkę obciążenia na wykresie interakcji, aż do osiągnięcia nośności materiałowej lub niestabilności wyboczeniowej. Dostępne są dwa tryby:

- 2D jednoosiowy: wyboczenie w jednej płaszczyźnie zginania ($N-M_z$ lub $N-M_y$). Druga składowa momentowa jest stała, a opcjonalny moment pierwszego rzędu M_1 może zostać zadany.
- 3D dwuosiowy: obie płaszczyzny wzmacniane jednocześnie, każda z własną długością wyboczeniową $l_{k,x}$ i $l_{k,y}$. Ścieżka obciążenia wyznaczana na pełnej trójwymiarowej powierzchni interakcji.

Obliczane wyniki

SectionPro podaje dla każdej analizy wyboczeniowej:

Ścieżka obciążenia

Siła ściskająca N zwiększana do zniszczenia
Mimośrod $e_{2,x}$, $e_{2,y}$ na każdym poziomie obciążenia
Moment całkowity M_{Ed} z efektami drugiego rzędu

Redukcja nośności

Stosunek punktu zniszczenia do przecięcia z krzywą
Na podstawie granicznych odkształceń materiałowych
Status: nośność lub wyboczenie
 $e_{2,max}$ w punkcie zniszczenia

Eksporty

PDF: ścieżka obciążenia na krzywej/powierzchni interakcji
XLS i TXT: pełne dane ścieżki (N , M_z , M_y , $e_{2,x}$, $e_{2,y}$)

Słup kołowy pełny (smukły)

Dane wejściowe

Beton

- Pełny przekrój kołowy
- Średnica $D = 1\{, \}00$ m
- Pole $A_c = 0\{, \}785$ m²

Zbrojenie

- 20 prętów HA25 ($\varphi_s = 25$ mm)
- Usytuowane przy $r = 447\{, \}5$ mm
- Otulina 40 mm – 1 warstwa
- $A_s = 20 \times 4\{, \}91 = 98\{, \}2$ cm²

Zależności materiałowe (EC2)

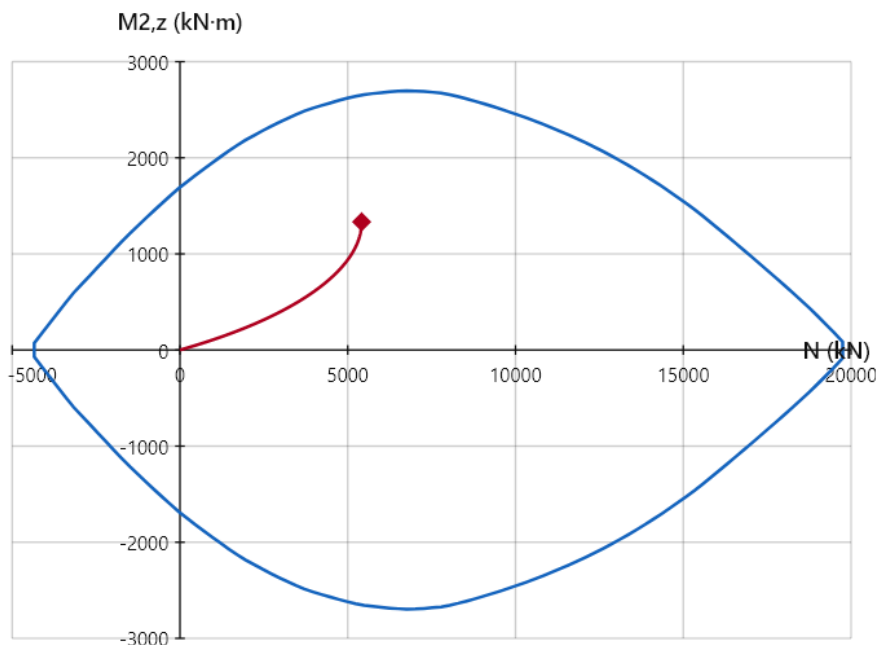
- Beton C30/37: $f_{ck} = 30$ MPa
- Stal B500B: $f_{yk} = 500$ MPa

The screenshot shows a web form titled 'Solid Circular Section'. Under the 'Concrete' section, the 'Diameter (m)' is set to 1. Under the 'Reinforcement' section, the mode is 'count', the number of rebars is 20, the bar diameter is 25 mm, the concrete cover is 40 mm, and there is 1 layer. Below the form is a diagram of a circular cross-section with 20 reinforcement bars arranged in a circle.

Rysunek 1: Słup kołowy pełny.

Wyboczenie 2D jednoosiowe (płaszczyzna $N-M_z$)

Słup ma efektywną długość wyboczeniową $l_k = 30\{, \}0$ m z początkowym mimośrodem $e_0 = 0\{, \}10$ m i bez momentu pierwszego rzędu ($M_1 = 0$).



Rysunek 2: Ścieżka obciążenia na krzywej interakcji $N-M_z$ – silna krzywizna wskazuje na znaczące efekty drugiego rzędu.

Przy smukłości $\lambda = l_k/i = 120$ słup jest bardzo smukły. Ścieżka obciążenia jest niemal liniowa do okolic $N = 3500$ kN, gdzie efekty drugiego rzędu pozostają niewielkie. Powyżej tego punktu mimośród e_2 rośnie gwałtownie, a ścieżka ostro zakrzywia się ku górze. Zniszczenie następuje przez niestabilność geometryczną przy:

- $N_{crit} = 5318$ kN

- Redukcja nośności: 53%
- Przy 25% maksymalnej nośności na ściskanie ($N = 5000 \text{ kN}$ z 20000 kN): moment całkowity $M_{Ed} = 928 \text{ kN} \cdot \text{m}$, z czego $M_2 = 430 \text{ kN} \cdot \text{m}$ to efekt drugiego rzędu (46%)

Dla tego smukłego słupa efekty drugiego rzędu są już znaczące przy ułamku nośności osiowej.

Słup kołowy drażony

Dane wejściowe

Beton

- Drażony przekrój kołowy
- Średnica zewnętrzna $D_{ext} = 2\{, \}50 \text{ m}$
- Grubość ścianki $t = 0\{, \}35 \text{ m}$
- Średnica wewnętrzna $D_{int} = 1\{, \}80 \text{ m}$

Zbrojenie

- 30 prętów HA20 ($\varphi_s = 20 \text{ mm}$)
- Usytuowane przy $r = 1200 \text{ mm}$ (warstwa zewnętrzna)
- Otulina 40 mm – 1 warstwa
- $A_s = 30 \times 3\{, \}14 = 94\{, \}2 \text{ cm}^2$

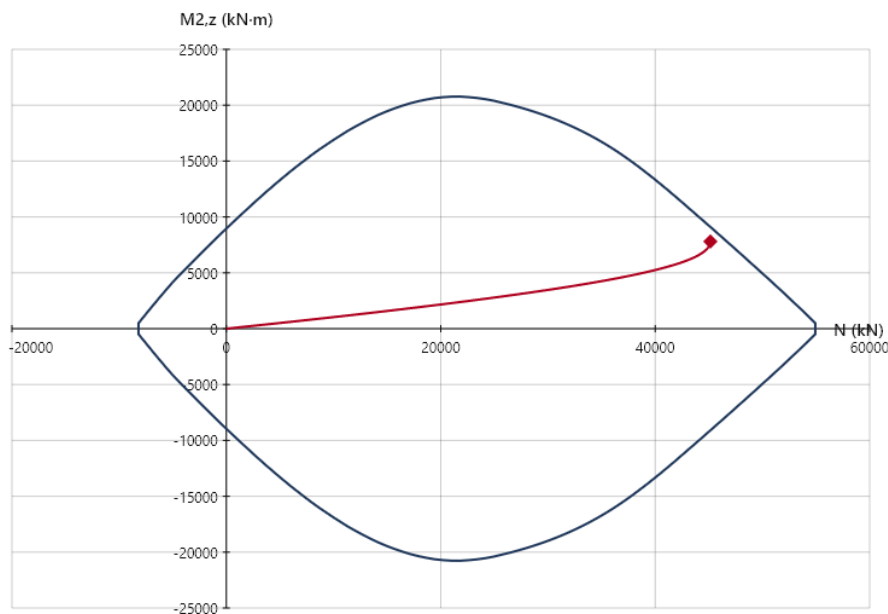
Zależności materiałowe (EC2)

- Beton C30/37: $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$
- Stal B500B: $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$

Wyboczenie 2D jednoosiowe (płaszczyzna $N-M_z$)

Słup ma efektywną długość wyboczeniową $l_k = 30\{, \}0 \text{ m}$ z początkowym mimośrodem $e_0 = 0\{, \}10 \text{ m}$ i bez momentu pierwszego rzędu ($M_1 = 0$).

Rysunek 3: Słup kołowy drażony.



Rysunek 4: Ścieżka obciążenia na krzywej interakcji $N-M_z$ – niemal liniowa, efekty drugiego rzędu są niewielkie.

Przy smukłości $\lambda = l_k/i = 39$ słup jest krępy. Ścieżka obciążenia jest niemal liniowa w większym zakresie, lecz mimośród e_2 zaczyna przyspieszać zauważalnie powyżej $N = 35000$ kN. W odróżnieniu od słupa smukłego, przyspieszenie pojawia się dopiero gdy N jest już blisko maksymalnej nośności na ściskanie. Słup ulega zniszczeniu tuż przed osiągnięciem krzywej interakcji:

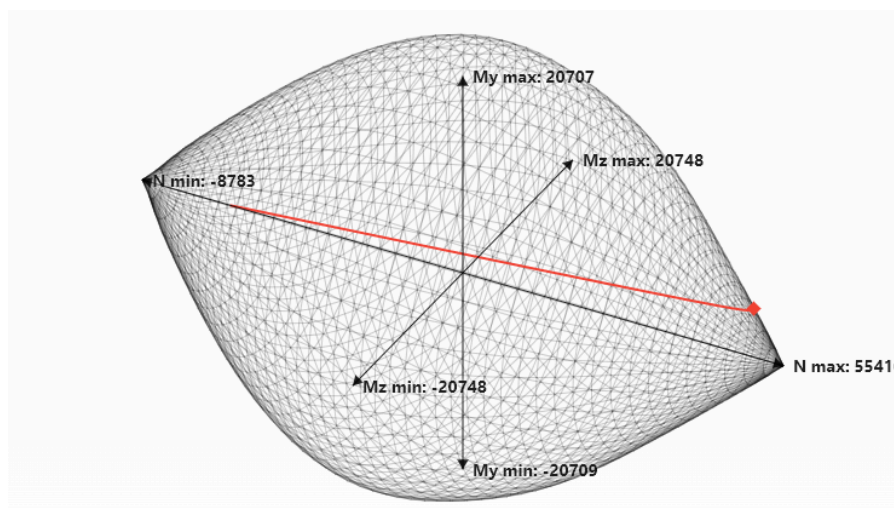
- $N_{\text{crit}} = 42154$ kN
- Redukcja nośności: 1,3%
- Przy 25% maksymalnej nośności na ściskanie ($N = 13000$ kN z 51000 kN): moment całkowity $M_{\text{Ed}} = 1560$ kN · m, z czego $M_2 = 260$ kN · m to efekt drugiego rzędu (17%)

Efekty drugiego rzędu stają się zauważalne dopiero gdy N zbliża się do nośności na ściskanie.

Wyboczenie 3D dwuosiowe

W trybie 3D SectionPro wzmacnia momenty zginające w obu płaszczyznach jednocześnie. Każdy kierunek ma własną długość wyboczeniową ($l_{k,x}$, $l_{k,y}$) i mimośród początkowy ($e_{0,x}$, $e_{0,y}$), a mimośrodów drugiego rzędu $e_{2,x}$ i $e_{2,y}$ są obliczane niezależnie.

Słup kołowy drażony jest analizowany z symetrycznymi długościami wyboczeniowymi: $l_{k,z} = l_{k,y} = 10$ m z $e_{0,z} = e_{0,y} = 0$. Nie zadano momentów pierwszego rzędu.



Rysunek 5: Ścieżka obciążenia 3D na powierzchni interakcji.

Przy krótkiej długości wyboczeniowej 10 m efekty drugiego rzędu są pomijalnie małe. Mimośród e_2 pozostaje poniżej 1 mm w większej części zakresu i osiąga $e_2 = 7,8$ mm dopiero w ostatnim punkcie. Ścieżka jest zasadniczo liniowa i osiąga powierzchnię interakcji przy:

- $N_{\text{crit}} = 50903$ kN
- Przy 25% maksymalnej nośności na ściskanie ($N = 12500$ kN z 51000 kN): moment całkowity $M_{\text{Ed}} = 626$ kN · m na oś, z czego $M_2 = 3$ kN · m to efekt drugiego rzędu (0,5%)

Słup osiąga pełną nośność materiałową praktycznie bez redukcji geometrycznej, dzięki mniejszym długościom wyboczeniowym i mimośrodom początkowym.

Test wydajności

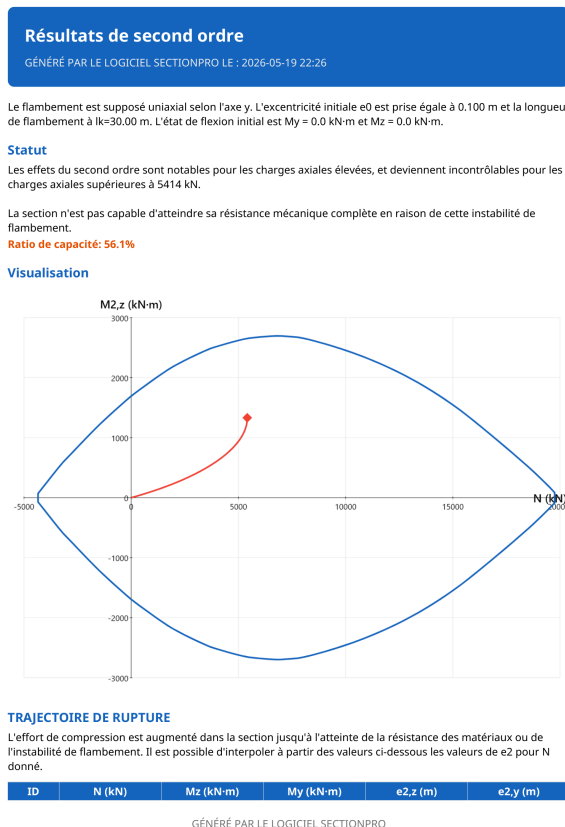
Analiza składa się z dwóch faz: budowy krzywej (lub powierzchni) interakcji, a następnie wyznaczania ścieżki obciążenia przez przyrostowe obliczanie e_2 . Każdy krok obejmuje wyznaczenie krzywizny przekroju algorytmem iteracyjnym. Poniższa tabela przedstawia czas obliczeń dla 500 punktów ścieżki.

Kołowy pełny (2D)	Kołowy drążony (2D)	Kołowy drążony (3D)
91 ms	252 ms	282 ms

Dominujący koszt stanowi budowa powierzchni interakcji. Wyznaczanie ścieżki dodaje zaledwie kilka milisekund, utrzymując analizę poniżej 300 ms.

Eksport

SectionPro eksportuje analizę wybocheniową w formacie PDF, tekst i Excel (.xlsx). Dane obejmują pełną ścieżkę obciążenia (N , M_z , M_y , $e_{2,x}$, $e_{2,y}$), współczynnik redukcji nośności oraz status wybochenia.



Rysunek 6: Eksport PDF – strona 1: ścieżka obciążenia na krzywej interakcji.

Résultats de second ordre
GÉNÉRÉ PAR LE LOGICIEL SECTIONPRO LE : 2026-05-19 22:26

1	0.0	0.0	0.0	0.00000	0.00000
2	54.7	5.5	0.0	0.00042	0.00000
3	109.4	11.0	0.0	0.00085	0.00000
4	164.1	16.6	0.0	0.00128	0.00000
5	218.7	22.3	0.0	0.00172	0.00000
6	273.4	27.9	0.0	0.00216	0.00000
7	328.1	33.7	0.0	0.00261	0.00000
8	382.8	39.5	0.0	0.00306	0.00000
9	437.5	45.3	0.0	0.00352	0.00000
10	492.2	51.2	0.0	0.00398	0.00000
11	546.9	57.1	0.0	0.00445	0.00000
12	601.6	63.1	0.0	0.00492	0.00000
13	656.2	69.2	0.0	0.00540	0.00000
14	710.9	75.3	0.0	0.00588	0.00000
15	765.6	81.4	0.0	0.00637	0.00000
16	820.3	87.7	0.0	0.00687	0.00000
17	875.0	94.0	0.0	0.00737	0.00000
18	929.7	100.3	0.0	0.00788	0.00000
19	984.4	106.7	0.0	0.00839	0.00000
20	1039.1	113.2	0.0	0.00892	0.00000
21	1093.7	119.7	0.0	0.00944	0.00000
22	1148.4	126.3	0.0	0.00997	0.00000
23	1203.1	133.0	0.0	0.01051	0.00000
24	1257.8	139.7	0.0	0.01106	0.00000
25	1312.5	146.5	0.0	0.01163	0.00000
26	1367.2	153.4	0.0	0.01219	0.00000
27	1421.9	160.3	0.0	0.01276	0.00000
28	1476.6	167.3	0.0	0.01333	0.00000
29	1531.2	174.4	0.0	0.01392	0.00000
30	1585.9	181.6	0.0	0.01451	0.00000
31	1640.6	188.8	0.0	0.01511	0.00000
32	1695.3	196.2	0.0	0.01572	0.00000
33	1750.0	203.6	0.0	0.01633	0.00000
34	1804.7	211.1	0.0	0.01695	0.00000
35	1859.4	218.6	0.0	0.01759	0.00000
36	1914.1	226.3	0.0	0.01823	0.00000
37	1968.7	234.0	0.0	0.01888	0.00000
38	2023.4	241.9	0.0	0.01954	0.00000

GÉNÉRÉ PAR LE LOGICIEL SECTIONPRO

Rysunek 7: Eksport PDF – strona 2: szczegółowa tabela wyników.

Podsumowanie

Metoda nominalnej krzywizny pozwala ocenić efekty drugiego rzędu na poziomie przekroju bez złożoności pełnego nieliniowego modelu MES. Wizualizacja ścieżki obciążenia na krzywej interakcji daje natychmiastową ocenę ich znaczenia.

Porównanie słupa pełnego ($\varnothing 1$ m) i drążonego ($\varnothing 2,5$ m) pokazuje, że właściwości geometryczne, a nie tylko długość wyboczeniowa, decydują o wyniku. Słup smukły ulega zniszczeniu przez niestabilność z silnie zakrzywioną ścieżką, natomiast słup drążony osiąga nośność materiałową z niewielkim wzmocnieniem drugiego rzędu.

Tryb 3D dwuosiowy rozszerza analizę na słupy o różnych długościach wyboczeniowych w każdym kierunku, wzmacniając momenty niezależnie w obu płaszczyznach.