

Dimensionamento da Armadura

Tutorial SectionPro — Armadura necessária para seções hexagonal, quadrada oca e viga em U sob cargas ELS e ELU (EC2, NBR-6118, BAEL 91)

BridgeKernel · 2026

Introdução

Dadas as forças internas impostas (N, M_y, M_z) e uma disposição de armadura predefinida (posições e espaçamento), o SectionPro determina o diâmetro mínimo φ_s para satisfazer os limites regulamentares. Este é o problema inverso da verificação de tensões (Artigo #2): em vez de verificar se uma armadura é suficiente, o software encontra a armadura que atinge o equilíbrio.

O solucionador itera sobre φ_s até que o estado de deformação ($\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z$) satisfaça o equilíbrio interno com os limites de deformação exactamente atingidos. Quando o betão sozinho resiste às cargas impostas, o resultado é $A_s = 0$.

Este artigo utiliza as mesmas três seções e casos de carga do Artigo #2. No Artigo #2, a armadura era fixa e alguns casos excediam a capacidade ($FS > 1$, verificação KO). Aqui, determinamos a armadura necessária. A correlação é directa: FS mais elevado no Artigo #2 implica φ_s maior no Artigo #3.

Resultados calculados

O SectionPro apresenta três categorias de resultados para cada caso de carga:

Tensões e deformações + dimensionamento

σ_c — Tensão extrema do betão
 $\sigma_{s, \min}, \sigma_{s, \max}$ — Tensões no aço
 ε_c — Deformação extrema do betão
 $\varepsilon_{s, \min}, \varepsilon_{s, \max}$ — Deformações no aço
Pivô — Modo de rotura (A, B, ou $A_s = 0$)
 φ_s — Diâmetro da barra necessário

Forças internas

N_c — Resultante de compressão
 N_t — Resultante de tracção
 (x_C, y_C) — Centróide de compressão
 (x_T, y_T) — Centróide de tracção
 z — Braço de alavanca interno

Convergência

N_{iter} — Iterações
Tol — Tolerância de convergência
 $N_{\text{int}}, M_{z, \text{int}}, M_{y, \text{int}}$ — Forças internas
 $\varepsilon_0, \kappa_x, \kappa_y$ — Estado de deformação

Pivôs de rotura

O pivô de rotura indica qual material atinge primeiro a deformação última:

- **Pivot A** — **Rotura do aço.** A armadura atinge ε_{su} antes do esmagamento do betão. Típico de secções pouco armadas. Deformação governante: $\varepsilon_s = \varepsilon_{su}$.
- **Pivot B** — **Rotura do betão.** O betão atinge ε_{cu} antes da cedência do aço. Típico de secções fortemente solicitadas. Deformação governante: $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$.
- **Pivot C** — **Compressão forte.** A deformação atinge $\varepsilon_c = \varepsilon_{c2}$ a $(1 - \varepsilon_{c2}/\varepsilon_{cu2}) \cdot h$ da fibra mais comprimida (i.e. $3h/7$ para $\varepsilon_{c2} = 2\%$ e $\varepsilon_{cu2} = 3.5\%$). Cenário raro.
- **Pivot $A_s = 0$** — **Sem armadura necessária.** O betão sozinho resiste às cargas. Área de aço: zero.

Secção hexagonal maciça

Dados de entrada

Betão

- Secção hexagonal
- Largura $B = 2.00$ m
- Espessura mínima $h_1 = 0.60$ m
- Espessura máxima $h_2 = 1.00$ m

Disposição da armadura

- Espaçamento uniforme 150 mm
- 30 posições de barras
- Recobrimento 50 mm — 1 camada
- Diâmetro φ_s : a determinar

Leis de materiais (EC2)

- Betão C30/37: $f_{ck} = 30$ MPa
- Aço B500B: $f_{yk} = 500$ MPa

Figura 1: Secção hexagonal.

ELS — Flexão composta ($N + M_z$)

Cargas impostas: $N = 500$ kN, $M_z = 1000$ kN · m, $M_y = 0$

Visualization of stresses and strains

Load 1 σ ε N Q Details

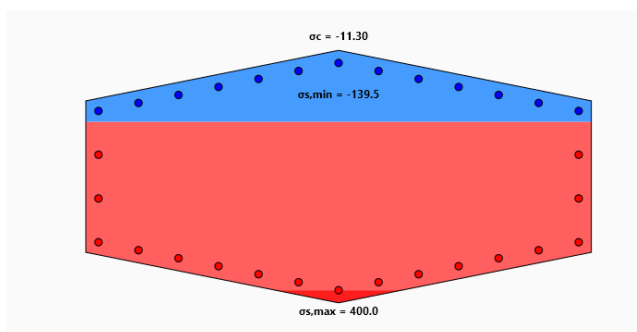


Figura 2: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

Load 1 σ ε N Q Details

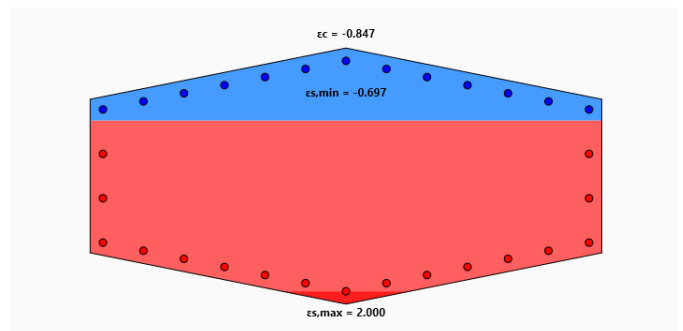


Figura 3: Distribuição de deformações.

Tensões e deformações + dimensionamento

σ_c	-11.30 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-139.49 MPa
$\sigma_{s, \max}$	400.00 MPa
ε_c	-0.847‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-0.697‰
$\varepsilon_{s, \max}$	2.000‰
Pivô	A
φ_s	17.60 mm

Forças internas

N_c	1697.8 kN
N_t	-1197.8 kN
x_C	0.000 m
y_C	0.364 m
x_T	0.000 m
y_T	-0.320 m
z	0.683 m

Convergência

N_{iter}	4
Tol	3.57×10^{-8}
N_{int}	500.0 kN
$M_{z, \text{int}}$	1000.0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	0.0 kN · m
ε_0	0.651×10^{-3}
κ_x	-2.997×10^{-3}
κ_y	0.000×10^{-3}

Pivot A: o aço governa ($\varepsilon_{s, \max} = 2.000\text{‰} = \varepsilon_{su}$). O diâmetro necessário é $\varphi_s = 17.60$ mm para as 30 posições de barras.

ELU — Flexão biaxial ($N + M_y + M_z$)

Cargas impostas: $N = 2000$ kN, $M_z = 3000$ kN · m, $M_y = 1800$ kN · m

Visualization of stresses and strains

Load 2 σ ε N Q κ Details

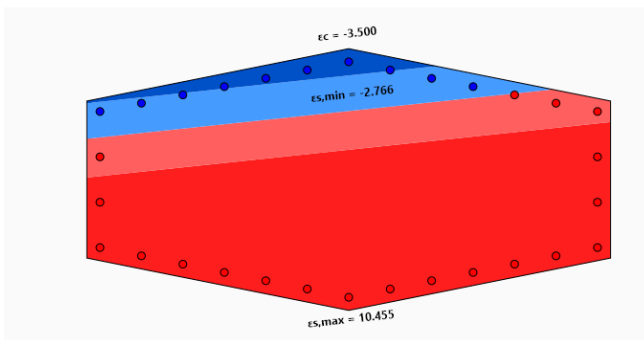


Figura 4: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

Load 2 σ ε N Q κ Details

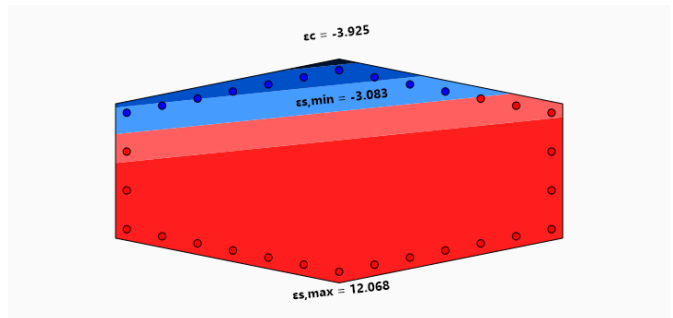


Figura 5: Distribuição de deformações.

Tensões e deformações + dimensionamento

σ_c	-20.00 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-435.21 MPa
$\sigma_{s, \max}$	440.81 MPa
ε_c	-3.500‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-2.766‰
$\varepsilon_{s, \max}$	10.455‰
Pivô	B
φ_s	25.12 mm

Forças internas

N_c	5827.2 kN
N_t	-3827.2 kN
x_C	-0.255 m
y_C	0.355 m
x_T	0.082 m
y_T	-0.243 m
z	0.687 m

Convergência

N_{iter}	43
Tol	3.66×10^{-8}
N_{int}	2000.0 kN
$M_{z, \text{int}}$	3000.0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	1800.0 kN · m
ε_0	3.845×10^{-3}
κ_x	-14.689×10^{-3}
κ_y	-1.556×10^{-3}

Pivot B: o betão governa ($\varepsilon_c = -3.500\text{‰} = \varepsilon_{cu}$). O diâmetro necessário é $\varphi_s = 25.12$ mm para o carregamento ELU biaxial.

Tensões e deformações + dimensionamento

σ_c	-4.79 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-62.26 MPa
$\sigma_{s, \max}$	400.02 MPa
ε_c	-0.342‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-0.296‰
$\varepsilon_{s, \max}$	1.905‰
Pivô	A
φ_s	10.00 mm

Forças internas

N_c	468.2 kN
N_t	-868.2 kN
x_C	-0.622 m
y_C	0.908 m
x_T	0.126 m
y_T	-0.547 m
z	1.636 m

Convergência

N_{iter}	575
Tol	2.63×10^{-8}
N_{int}	-400.0 kN
$M_{z, \text{int}}$	900.0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	400.0 kN · m
ε_0	0.804×10^{-3}
κ_x	-0.920×10^{-3}
κ_y	-0.226×10^{-3}

Pivot A: o aço governa ($\varepsilon_{s, \max} = 2.000\text{‰} = \varepsilon_{su}$). O diâmetro necessário é $\varphi_s = 10.00$ mm.

ELU — Flexão biaxial ($N + M_y + M_z$)

Cargas impostas: $N = 0$ kN, $M_z = 6000$ kN · m, $M_y = 6000$ kN · m

Visualization of stresses and strains

Load 2 σ ε N Q Q Details

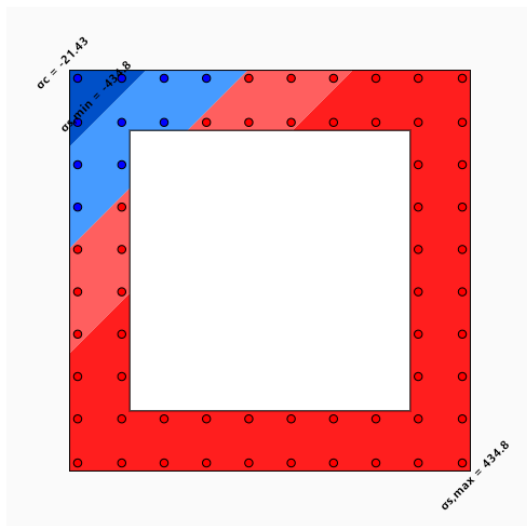


Figura 9: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

Load 2 σ ε N Q Q Details

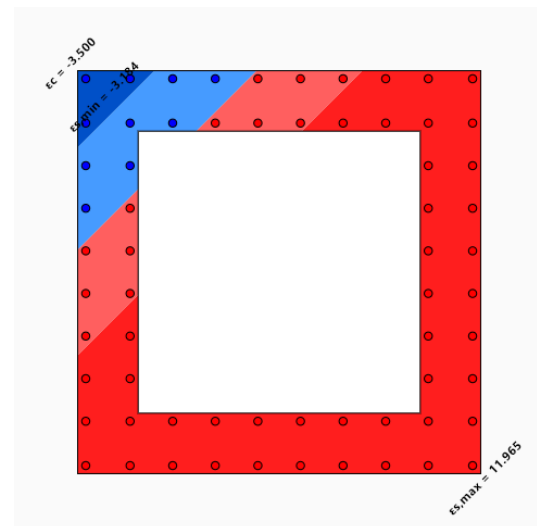


Figura 10: Distribuição de deformações.

Tensões e deformações + dimensionamento

σ_c	-21.43 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-434.78 MPa
$\sigma_{s, \max}$	434.78 MPa
ε_c	-3.500‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-3.184‰
$\varepsilon_{s, \max}$	11.965‰
Pivô	B
φ_s	19.38 mm

Forças internas

N_c	5901.2 kN
N_t	-899.0 kN
x_C	-0.756 m
y_C	0.751 m
x_T	-0.179 m
y_T	0.421 m
z	0.664 m

Convergência

N_{iter}	41
Tol	3.40×10^{-8}
N_{int}	0.0 kN
$M_{z, \text{int}}$	6000.0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	6000.0 kN · m
ε_0	4.390×10^{-3}
κ_x	-3.945×10^{-3}
κ_y	-3.945×10^{-3}

Pivot B: o betão governa ($\varepsilon_c = -3.500\text{‰} = \varepsilon_{cu}$). O diâmetro necessário é $\varphi_s = 19.38$ mm para o carregamento ELU biaxial.

Secção personalizada — Viga em U

Dados de entrada

Esta secção utiliza a **geometria maciça personalizada**. O contorno exterior é definido por pontos XY e a armadura por posições (x, y) . Procedimento recomendado para geometrias que não correspondem a formas paramétricas predefinidas.

Betão

- Viga em U com almas inclinadas
- Altura total $h = 1.20$ m

Disposição da armadura

- Espaçamento uniforme 150 mm
- Laje inferior: 11 posições
- Almas: 49 posições
- 2 camadas por alma
- Diâmetro φ_s : a determinar

Leis de materiais (BAEL 91)

- Betão: $f_{c28} = 30$ MPa, $\theta = 0.85$
- Aço fe500: $f_e = 500$ MPa

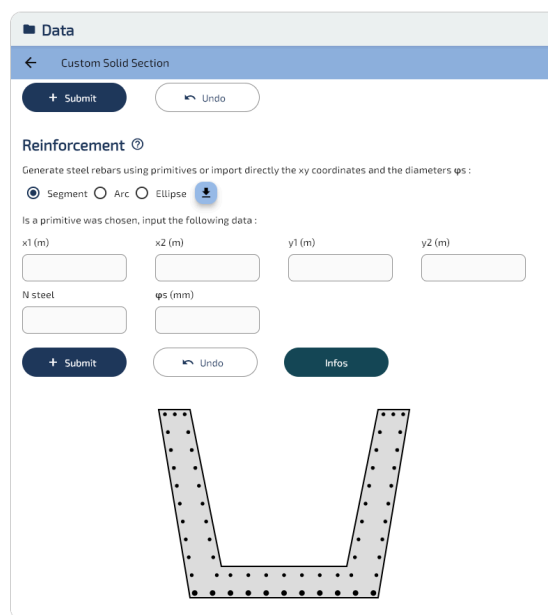


Figura 11: Viga em U — geometria e disposição da armadura.

ELS — Flexão simples (M_z)

Cargas impostas: $N = 0$ kN, $M_z = 1500$ kN · m, $M_y = 0$

Visualization of stresses and strains

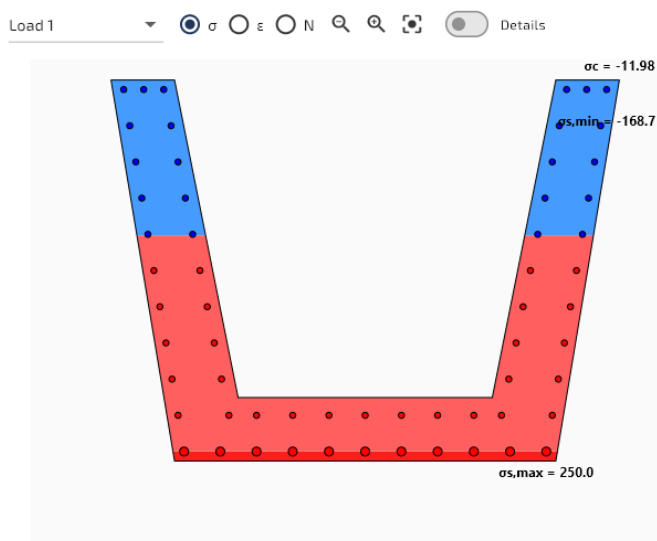


Figura 12: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

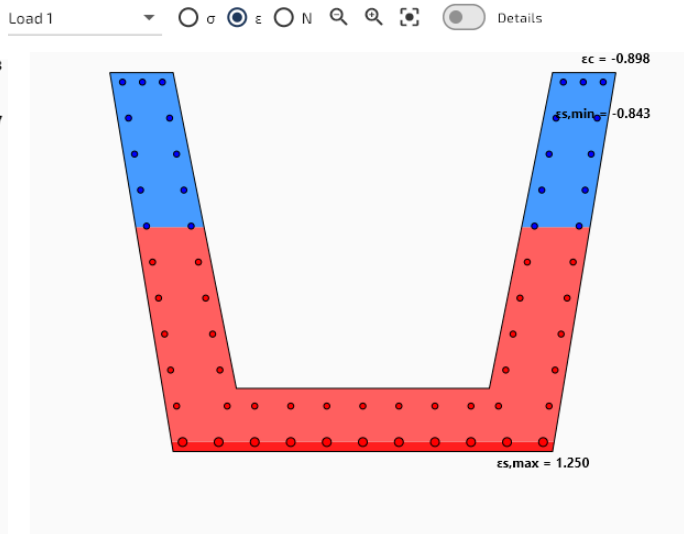


Figura 13: Distribuição de deformações.

Tensões e deformações + dimensionamento

σ_c	-11.98 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-168.65 MPa
$\sigma_{s, \max}$	250.00 MPa
ε_c	-0.898‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-0.843‰
$\varepsilon_{s, \max}$	1.250‰
Pivô	A
φ_s	17.88 mm

Forças internas

N_c	1680.9 kN
N_t	-1680.9 kN
x_C	0.000 m
y_C	0.571 m
x_T	0.000 m
y_T	-0.321 m
z	0.892 m

Convergência

N_{iter}	4
Tol	2.21×10^{-7}
N_{int}	0.0 kN
$M_{z, \text{int}}$	1500.0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	0.0 kN · m
ε_0	0.434×10^{-3}
κ_x	-1.836×10^{-3}
κ_y	0.000×10^{-3}

Pivot A: o aço governa ($\sigma_{s, \max} = 250.00 \text{ MPa} = \bar{\sigma}_s$, a tensão admissível BAEL para fissuração prejudicial). O diâmetro necessário é $\varphi_s = 17.88 \text{ mm}$ aplicado uniformemente às 60 posições de barras.

ELU — Flexão biaxial ($M_y + M_z$)

Cargas impostas: $N = 0 \text{ kN}$, $M_z = 2000 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_y = 500 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Visualization of stresses and strains

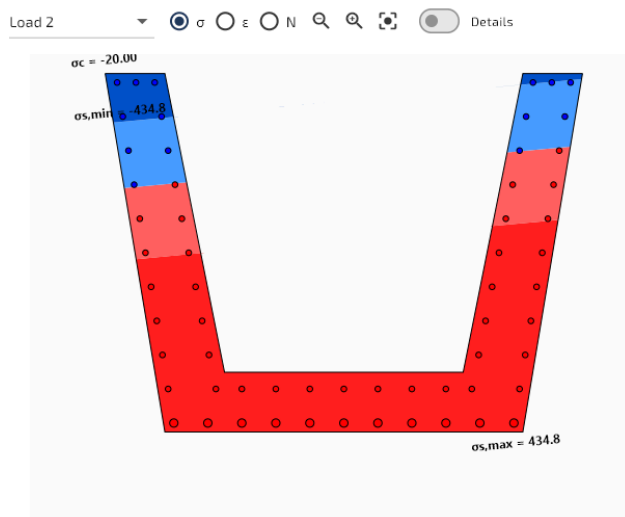


Figura 14: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

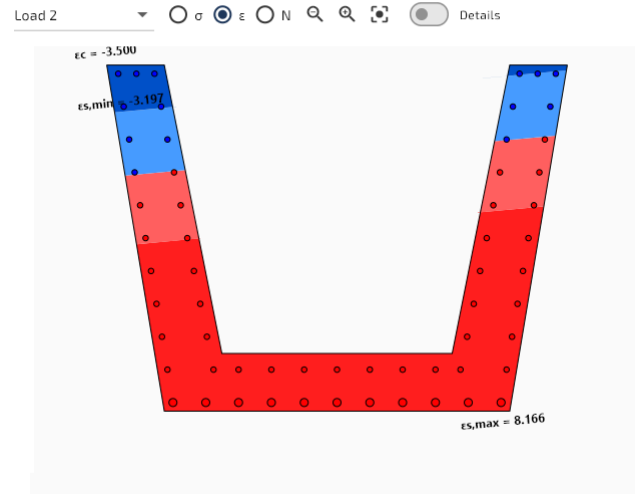


Figura 15: Distribuição de deformações.

Tensões e deformações + dimensionamento

σ_c	-20.00 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-434.78 MPa
$\sigma_{s, \max}$	434.78 MPa
ε_c	-3.500‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-3.197‰
$\varepsilon_{s, \max}$	8.166‰
Pivô	B
φ_s	13.26 mm

Forças internas

N_c	2386.2 kN
N_t	-405.4 kN
x_C	-0.142 m
y_C	0.596 m
x_T	-0.060 m
y_T	0.191 m
z	0.413 m

Convergência

N_{iter}	39
Tol	3.29×10^{-8}
N_{int}	0.0 kN
$M_{z, \text{int}}$	2000.0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	500.0 kN · m
ε_0	3.693×10^{-3}
κ_x	-8.996×10^{-3}
κ_y	-0.833×10^{-3}

Pivot B: o betão governa ($\varepsilon_c = -3.500\text{‰} = \varepsilon_{cu}$). O diâmetro necessário é $\varphi_s = 13.26$ mm para o carregamento ELU biaxial.

Validação dos resultados

Verificação do equilíbrio interno

As cargas impostas (N, M_y, M_z) são a **entrada**. O SectionPro encontra o diâmetro φ_s e o estado de deformação correspondente ($\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z$) por resolução iterativa, integrando depois as tensões sobre a secção para obter as forças **internas** ($N_{\text{int}}, M_{y,\text{int}}, M_{z,\text{int}}$). Na convergência, estas devem coincidir com as cargas impostas:

$$N_{\text{int}} \approx N \quad M_{y,\text{int}} \approx M_y \quad M_{z,\text{int}} \approx M_z$$

Secção	Carga	N (kN)	N_{int} (kN)	M_z (kN·m)	$M_{z,\text{int}}$ (kN·m)	Δ
Hexagonal	ELS	500.0	500.0	1000.0	1000.0	0.00 %
	ELU	2000.0	2000.0	3000.0	3000.0	0.00 %
Quadr. oca	ELS	-400.0	-400.0	900.0	900.0	0.00 %
	ELU	0.0	0.0	6000.0	6000.0	0.00 %
Viga em U	ELS	0.0	0.0	1500.0	1500.0	0.00 %
	ELU	0.0	0.0	2000.0	2000.0	0.00 %

Equilíbrio interno satisfeito com precisão de máquina para os seis casos de carga — três geometrias distintas, três códigos regulamentares, e leis de materiais lineares (ELS) e não lineares (ELU).

Referência cruzada com o Artigo #2

A tabela seguinte compara o factor de segurança do Artigo #2 (armadura fixa) com o φ_s necessário calculado neste artigo. O dimensionamento da armadura aplica um φ_s uniforme a todas as posições de barras.

Secção	Carga	φ_s (Art. #2)	FS (Art. #2)	Verif. (Art. #2)	Pivô	φ_s necessário
Hexagonal	ELS	25 mm	0.527	OK	A	17.6 mm
	ELU	25 mm	1.121	KO	B	25.1 mm
Quadr. oca	ELS	20 mm	0.274	OK	A	10.0 mm
	ELU	20 mm	0.634	OK	B	19.4 mm
Viga em U	ELS	20/12 mm	1.209	KO	A	17.9 mm
	ELU	20/12 mm	0.436	OK	B	13.3 mm

Para secções com armadura uniforme (hexagonal e quadrada oca), a correlação é directa: $FS > 1$ implica $\varphi_{s,\text{required}} > \varphi_{s,\text{original}}$ e vice-versa. Para a viga em U, que possuía diâmetros mistos, a comparação deve basear-se na área total de aço e não apenas no φ_s .

Benchmark — 100 000 casos de carga

Para demonstrar a adequação do SectionPro ao dimensionamento sistemático, executamos 100 000 casos de carga em **cada uma das três secções** definidas acima. Os casos combinam ELS/ELU, flexão uniaxial e biaxial. O benchmark mede o tempo de cálculo puro, excluindo a interface. Convergência obtida para os 300 000 casos.

Métrica	Hexagonal	Quadrada oca	Viga em U
Casos de carga	100 000	100 000	100 000
Tempo de cálculo	5.26 s	5.30 s	5.35 s
Cadência	19 000 cargas/s	18 900 cargas/s	18 700 cargas/s

As três secções completam em aproximadamente 5,3 segundos para 100 000 casos — cadências de 18 700 a 19 000 dimensionamentos por segundo. Isto é mais lento que a verificação de tensões (Artigo #2), o que é esperado: o dimensionamento acrescenta um ciclo de iteração exterior sobre φ_s , cada iteração requerendo resolução completa de $(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z)$.

Convergência obtida para os 300 000 casos, abrangendo três geometrias, três códigos regulamentares e ambos os estados-limite. Apesar desta camada adicional, o SectionPro dimensiona 100 000 casos em menos de 6 segundos, tornando-o prático para grandes envoltentes de cargas.

Exportação

O SectionPro exporta os resultados em três formatos: **PDF**, **texto** (colunas de largura fixa) e **Excel** (.xlsx). Os dados exportados incluem, por caso de carga: tensões e deformações, o pivô de rotura, o diâmetro necessário φ_s , forças internas (com centróides e braço de alavanca) e toda a informação de convergência.

REINFORCEMENT DESIGN RESULTS
GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-03-13 13:49

Load case #2 is the most unfavorable

ε , σ and ϕ_s

ϕ_s is the calculated reinforcement diameter. σ and ε are the stresses and strains of concrete and steel (indices c and s). The pivot indicates the limit strain reached (A: steel, B: concrete, AS0: concrete alone sufficient).

Param	Unit	#2	#1
σ_c	MPa	-20.00	-11.30
$\sigma_{s,min}$	MPa	-435.21	-139.49
$\sigma_{s,max}$	MPa	440.81	400.00
ε_c	‰	-3.500	-0.847
$\varepsilon_{s,min}$	‰	-2.766	-0.697
$\varepsilon_{s,max}$	‰	10.455	2.000
Pivot	-	B	A
ϕ_s	mm	25.12	17.60

Internal forces

N_c and N_t are the compression and tension forces resulting from the integration of stresses over the section. The application coordinates of these forces are given by xy . The lever arm z is the distance between these forces.

Param	Unit	#2	#1
N_c	kN	5827.2	1697.8
N_t	kN	-3827.2	-1197.8
x_C	m	-0.255	-0.000
y_C	m	0.355	0.363
x_T	m	0.082	0.000
y_T	m	-0.243	-0.320
z	m	0.687	0.683

Convergence

Given below are the number of iterations necessary for convergence of the solution algorithm, the tolerance achieved, the internal forces (N, M_x, M_y) and the deformation state of the section ($\varepsilon_0, \kappa_{xy}$).

Param	Unit	#2	#1
N_{iter}	-	43	4
Tol	-	3.66e-8	3.57e-8
N_{int}	kN	2000.0	500.00
$M_{x,int}$	kN-m	3000.0	1000.00
$M_{y,int}$	kN-m	1800.0	0.0
ε_0	‰	3.845	0.651
κ_x	‰	-14.689	-2.997
κ_y	‰	-1.556	-0.000

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

REINFORCEMENT DESIGN RESULTS
GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-03-13 13:49

Given below are figures representing graphically the previous tabular results.

Load case n°2: $\phi_s = 25.12$ mm (σ , ε and N_c, N_t displayed below)

Load case n°1: $\phi_s = 17.60$ mm (σ , ε and N_c, N_t displayed below)

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

Figura 16: Exportação PDF — página 1: tabelas.

Figura 17: Exportação PDF — página 2: figuras.

| Conclusão

Na prática, um engenheiro de estruturas enfrenta tipicamente dois problemas complementares: verificar uma secção com armadura conhecida — como abordado no Artigo #2 — ou determinar a armadura necessária para resistir a um dado conjunto de cargas impostas. A funcionalidade de dimensionamento da armadura aborda directamente o segundo caso. Quando a disposição das barras é conhecida mas o diâmetro ainda não está fixo, o SectionPro encontra o φ_s mínimo tal que a secção é solicitada exactamente a 100% da sua capacidade sob os limites regulamentares de deformação. Isto fornece ao engenheiro a armadura estritamente mínima como ponto de partida, a partir da qual um diâmetro de barra comercial pode ser seleccionado.

Os resultados são consistentes com a formulação do problema inverso: o equilíbrio interno é satisfeito com precisão de máquina para todos os casos de carga, abrangendo três geometrias distintas, três códigos regulamentares e ambos os estados-limite ELS e ELU. O solucionador converge de forma fiável em todos os casos. Quanto ao desempenho, o benchmark de 100 000 casos de carga serve como limite superior — na prática, um engenheiro de estruturas trabalha tipicamente com algumas centenas de combinações de carga. À cadência medida de 19 000 dimensionamentos por segundo, 500 combinações completam em menos de 30 milissegundos: o cálculo é essencialmente instantâneo.