



Dimensionamento da Armadura

Tutorial SectionPro — Armadura necessária para seções hexagonal, quadrada oca e viga em U sob cargas ELS e ELU (EC2, NBR-6118, BAEL 91)

BridgeKernel · 2026

Introdução

Dadas forças internas impostas (N, M_y, M_z) e uma disposição de armadura predefinida (posições e espaçamento das barras), o SectionPro determina o diâmetro mínimo φ_s necessário para atender aos limites normativos em cada posição de barra. Este é o problema inverso da verificação de tensões (Artigo #2): em vez de verificar se uma armadura existente é suficiente, o software encontra a armadura que atinge o equilíbrio sob as cargas impostas.

O solver itera sobre φ_s até que o estado de deformação ($\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z$) satisfaça o equilíbrio interno com os limites de deformação normativos exatamente atingidos. Quando o concreto sozinho pode resistir às cargas impostas sem armadura, o resultado é $A_s = 0$ — nenhuma armadura é necessária.

Este artigo usa as mesmas três seções e os mesmos casos de carga do Artigo #2. No Artigo #2, a armadura era fixa e alguns casos de carga excediam a capacidade da seção ($FS > 1$, verificação KO). Aqui, determinamos a armadura necessária. A correlação é direta: um FS maior no Artigo #2 implica um φ_s maior no Artigo #3.

Resultados calculados

O SectionPro reporta três categorias de resultados por caso de carga:

Tensões e deformações + projeto

σ_c — Tensão extrema do concreto
 $\sigma_{s, \min}, \sigma_{s, \max}$ — Tensões no aço
 ε_c — Deformação extrema do concreto
 $\varepsilon_{s, \min}, \varepsilon_{s, \max}$ — Deformações no aço
Pivô — Modo de ruptura (A, B ou $A_s = 0$)

Pivôs de ruptura — Diâmetro de barra necessário

Forças internas

N_c — Resultante de compressão
 N_t — Resultante de tração
 (x_C, y_C) — Centroides de compressão
 (x_T, y_T) — Centroides de tração
 z — Braço de alavanca interno

Convergência

N_{iter} — Iterações
Tol — Tolerância de convergência
 $N_{\text{int}}, M_{z, \text{int}}, M_{y, \text{int}}$ — Forças internas
 $\varepsilon_0, \kappa_x, \kappa_y$ — Estado de deformação

O pivô de ruptura indica qual material atinge primeiro sua deformação última:

- **Pivô A — Ruptura do aço.** A armadura tracionada atinge sua deformação última ε_{su} antes do esmagamento do concreto. Típico de seções levemente armadas ou dominadas por tração. Deformação governante: $\varepsilon_s = \varepsilon_{su}$.
- **Pivô B — Ruptura do concreto.** O concreto atinge sua deformação última de compressão ε_{cu} antes da plastificação total do aço. Típico de seções fortemente solicitadas ou dominadas por compressão. Deformação governante: $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$.
- **Pivô C — Compressão intensa.** A seção está fortemente comprimida. A deformação atinge $\varepsilon_c = \varepsilon_{c2}$ em um ponto específico a $(1 - \varepsilon_{c2}/\varepsilon_{cu2}) \cdot h$ da fibra mais comprimida (ou seja, $3h/7$ para os valores correntes $\varepsilon_{c2} = 2\text{‰}$ e $\varepsilon_{cu2} = 3.5\text{‰}$). Cenário raro na prática.
- **Pivô $A_s = 0$ — Sem armadura.** O concreto sozinho resiste às cargas impostas. A área de aço necessária é zero.

Seção hexagonal maciça

Dados de entrada

Concreto

- Seção transversal hexagonal
- Largura $B = 2.00$ m
- Espessura mínima $h_1 = 0.60$ m
- Espessura máxima $h_2 = 1.00$ m

Disposição da armadura

- Espaçamento uniforme 150 mm
- 30 posições de barras
- Cobrimento 50 mm — 1 camada
- Diâmetro φ_s : a determinar

Leis dos materiais (EC2)

- Concreto C30/37: $f_{ck} = 30$ MPa
- Aço B500B: $f_{yk} = 500$ MPa

The screenshot shows a software interface titled "Solid hexagonal section". It has two main sections: "Concrete" and "Reinforcement".

Concrete:

- Height h1 (m): 0.6
- Height h2 (m): 1
- Width (m): 2

Reinforcement:

- Mode: uniform spacing
- Bar spacing (mm): 150
- Bar diameter (mm): 25
- Concrete cover (mm): 50
- Layers (1 or 2): 1

Buttons for "Submit" and "Infos" are visible. Below the form is a 3D visualization of a hexagonal section with reinforcement bars.

Figura 1: Seção hexagonal.

ELS — Flexão composta ($N + M_z$)

Cargas impostas: $N = 500$ kN, $M_z = 1000$ kN · m, $M_y = 0$

Visualization of stresses and strains

Load 1 σ ε N M Q R Details

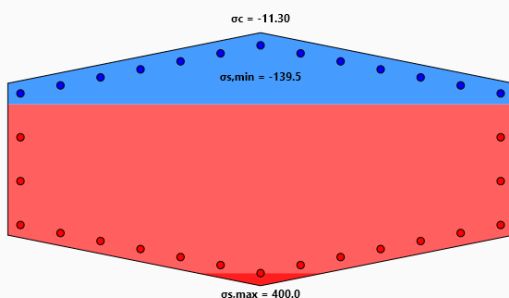


Figura 2: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

Load 1 σ ε N M Q R Details

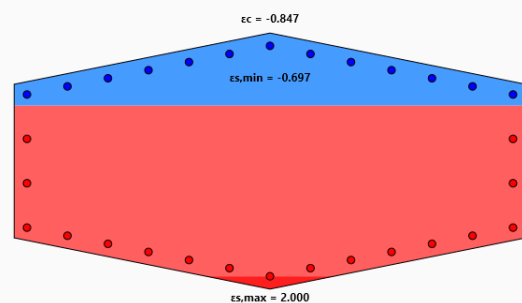


Figura 3: Distribuição de deformações.

Tensões e deformações + projeto

Forças internas

Convergência

σ_c	-11.30 MPa	N_c	1697.8 kN	N_{iter}	4
$\sigma_{s, \min}$	-139.49 MPa	N_t	-1197.8 kN	Tol	3.57×10^{-8}
$\sigma_{s, \max}$	400.00 MPa	x_C	0.000 m	N_{int}	500.0 kN
ε_c	-0.847‰	y_C	0.364 m	$M_{z, int}$	1000.0 kN · m
$\varepsilon_{s, \min}$	-0.697‰	x_T	0.000 m	$M_{y, int}$	0.0 kN · m
$\varepsilon_{s, \max}$	2.000‰	y_T	-0.320 m	ε_0	0.651×10^{-3}
Pivô	A	z	0.683 m	κ_x	-2.997×10^{-3}
φ_s	17.60 mm			κ_y	0.000×10^{-3}

Pivô A: o aço governa ($\varepsilon_{s, \max} = 2.000\text{‰} = \varepsilon_{su}$). Diâmetro necessário: $\varphi_s = 17.60$ mm (30 barras).

ELU — Flexão biaxial ($N + M_y + M_z$)

Cargas impostas: $N = 2000$ kN, $M_z = 3000$ kN · m, $M_y = 1800$ kN · m

Visualization of stresses and strains

Load 2 σ ε N Q κ Details

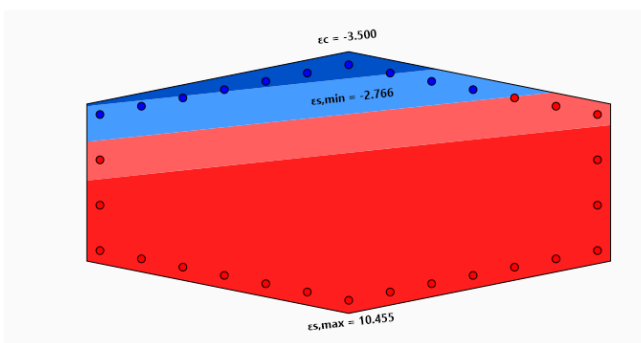


Figura 4: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

Load 2 σ ε N Q κ Details

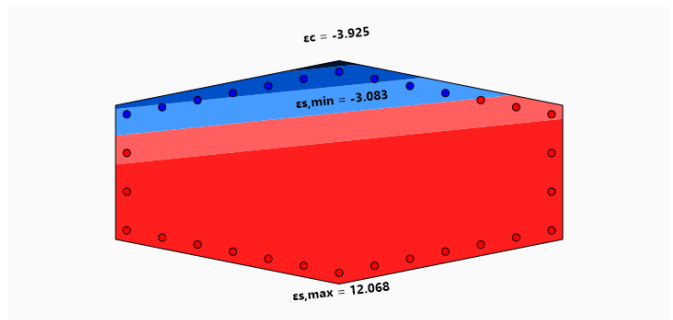


Figura 5: Distribuição de deformações.

Tensões e deformações + projeto

Forças internas

Convergência

σ_c	-20.00 MPa	N_c	5827.2 kN	N_{iter}	43
$\sigma_{s, \min}$	-435.21 MPa	N_t	-3827.2 kN	Tol	3.66×10^{-8}
$\sigma_{s, \max}$	440.81 MPa	x_C	-0.255 m	N_{int}	2000.0 kN
ε_c	-3.500‰	y_C	0.355 m	$M_{z, int}$	3000.0 kN · m
$\varepsilon_{s, \min}$	-2.766‰	x_T	0.082 m	$M_{y, int}$	1800.0 kN · m
$\varepsilon_{s, \max}$	10.455‰	y_T	-0.243 m	ε_0	3.845×10^{-3}
Pivô	B	z	0.687 m	κ_x	-14.689×10^{-3}
φ_s	25.12 mm			κ_y	-1.556×10^{-3}

Pivô B: o concreto governa ($\varepsilon_c = -3.500\text{‰} = \varepsilon_{cu}$). Diâmetro necessário: $\varphi_s = 25.12$ mm (ELU biaxial).

Seção quadrada oca

Dados de entrada

Concreto

- Seção quadrada oca
- Lado externo $a = 2.0$ m
- Espessura da parede $t = 0.30$ m

Disposição da armadura

- Espaçamento uniforme 150 mm
- 64 posições de barras
- Cobrimento 40 mm
- 1 camada por face (int. + ext.)
- Diâmetro φ_s : **a determinar**

Materiais (NBR-6118)

- Concreto C30: $f_{ck} = 30$ MPa
- Aço: $f_{yk} = 500$ MPa

The screenshot shows a software interface for defining a hollow square section. The 'Concrete' section has 'Side length (m)' set to 2 and 'Thickness (m)' set to 0.3. The 'Reinforcement' section has 'Mode' set to 'uniform spacing', 'Bar spacing (mm)' set to 200, 'Bar diameter (mm)' set to 20, 'Concrete cover (mm)' set to 40, and 'Layers (1 or 2)' set to 1. Below the form is a diagram of a hollow square section with a grid of reinforcement bars.

Figura 6: Seção quadrada oca — geometria e armadura.

ELS — Flexão biaxial ($N + M_y + M_z$)

Cargas impostas: $N = -400$ kN, $M_z = 900$ kN · m, $M_y = 400$ kN · m

Visualization of stresses and strains

Load 1 σ ε N Q Q Details

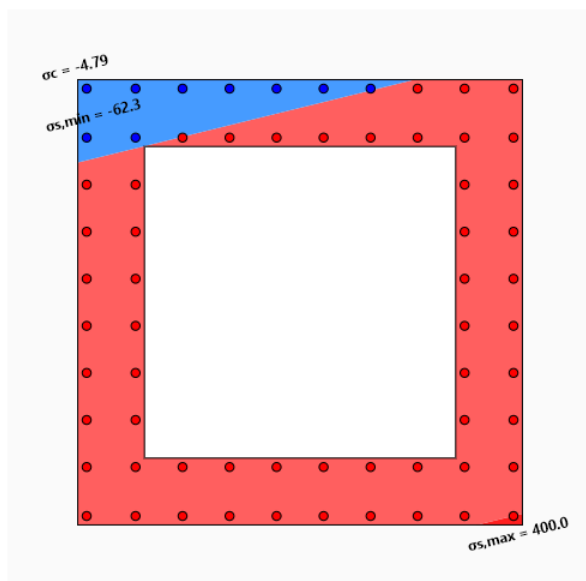


Figura 7: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

Load 1 σ ε N Q Q Details

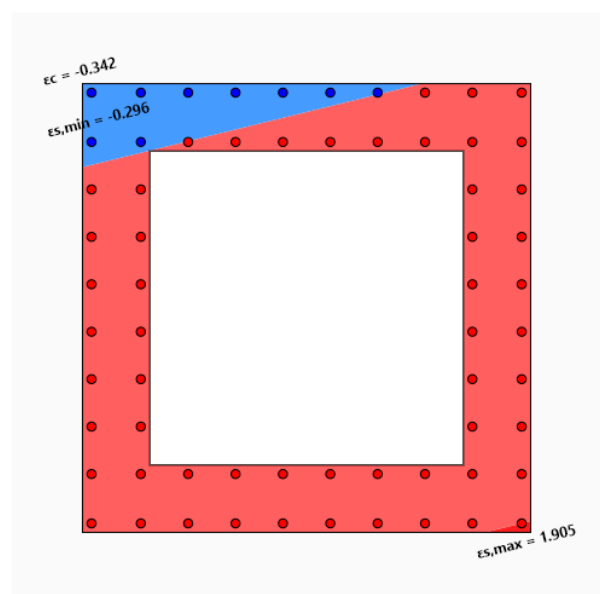


Figura 8: Distribuição de deformações.

Seção personalizada — Viga em U

Dados de entrada

Esta seção usa o recurso de **geometria sólida personalizada**. O contorno externo é definido como uma lista de pontos XY, e a disposição da armadura é fornecida como uma tabela de posições (x, y) . Procedimento recomendado para geometrias não padronizadas que não se encaixam em formas paramétricas predefinidas.

Concreto

- Viga em U com almas inclinadas
- Altura total $h = 1.20$ m

Disposição da armadura

- Espaçamento uniforme 150 mm
- Laje inferior: 11 posições
- Almas: 49 posições
- 2 camadas por alma
- Diâmetro φ_s : a determinar

Materiais (BAEL 91)

- Concreto: $f_{c28} = 30$ MPa, $\theta = 0.85$
- Aço fe500: $f_e = 500$ MPa

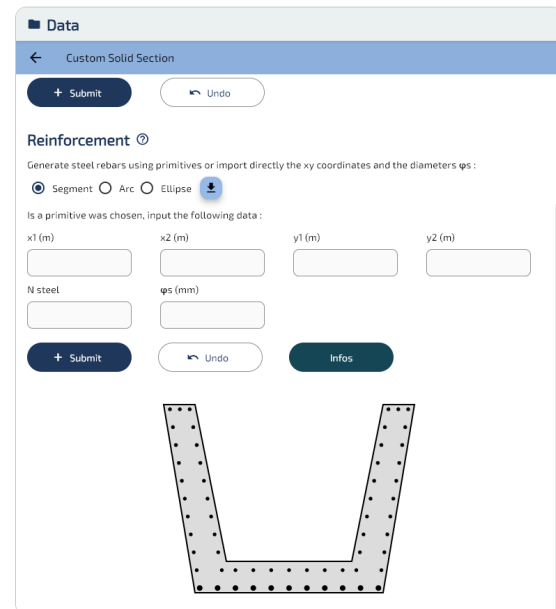


Figura 11: Viga em U — geometria e armadura.

ELS — Flexão simples (M_z)

Cargas impostas: $N = 0$ kN, $M_z = 1500$ kN · m, $M_y = 0$

Visualization of stresses and strains

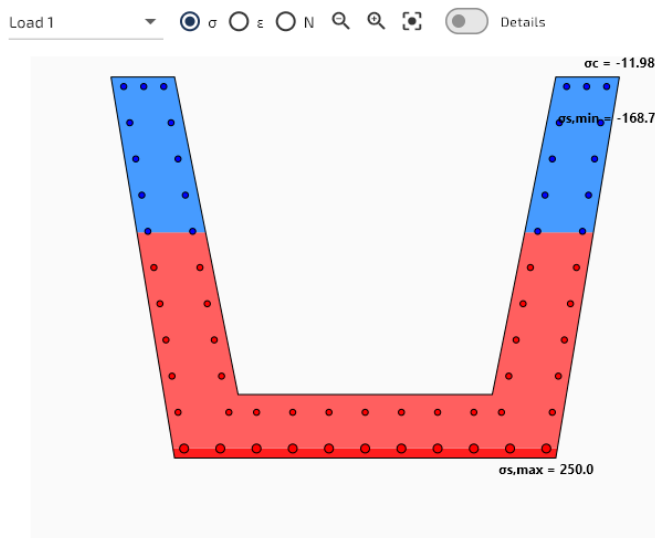


Figura 12: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

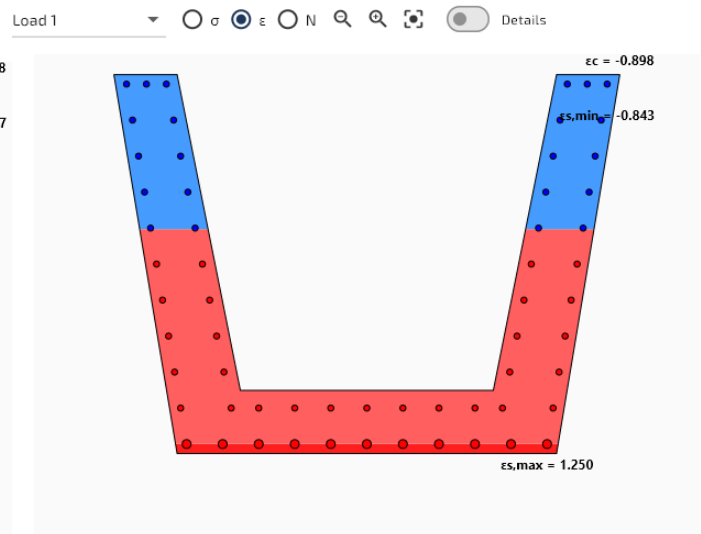


Figura 13: Distribuição de deformações.

Tensões e deformações + projeto

σ_c	-11.98 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-168.65 MPa
$\sigma_{s, \max}$	250.00 MPa
ε_c	-0.898‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-0.843‰
$\varepsilon_{s, \max}$	1.250‰
Pivô	A
φ_s	17.88 mm

Forças internas

N_c	1680.9 kN
N_t	-1680.9 kN
x_C	0.000 m
y_C	0.571 m
x_T	0.000 m
y_T	-0.321 m
z	0.892 m

Convergência

N_{iter}	4
Tol	2.21×10^{-7}
N_{int}	0.0 kN
$M_{z, \text{int}}$	1500.0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	0.0 kN · m
ε_0	0.434×10^{-3}
κ_x	-1.836×10^{-3}
κ_y	0.000×10^{-3}

Pivô A: o aço governa ($\sigma_{s, \max} = 250.00 \text{ MPa} = \bar{\sigma}_s$, tensão admissível BAEL). Diâmetro necessário: $\varphi_s = 17.88 \text{ mm}$ (60 barras).

ELU — Flexão biaxial ($M_y + M_z$)

Cargas impostas: $N = 0 \text{ kN}$, $M_z = 2000 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_y = 500 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Visualization of stresses and strains

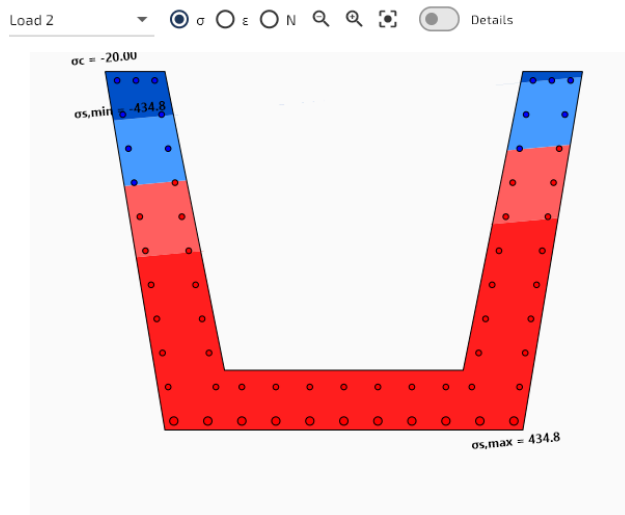


Figura 14: Distribuição de tensões.

Visualization of stresses and strains

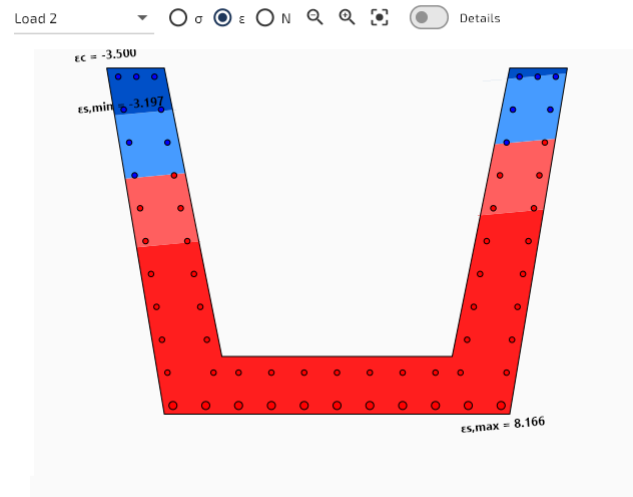


Figura 15: Distribuição de deformações.

Tensões e deformações + projeto

σ_c	-20.00 MPa
$\sigma_{s, \min}$	-434.78 MPa
$\sigma_{s, \max}$	434.78 MPa
ε_c	-3.500‰
$\varepsilon_{s, \min}$	-3.197‰
$\varepsilon_{s, \max}$	8.166‰
Pivô	B
φ_s	13.26 mm

Forças internas

N_c	2386.2 kN
N_t	-405.4 kN
x_C	-0.142 m
y_C	0.596 m
x_T	-0.060 m
y_T	0.191 m
z	0.413 m

Convergência

N_{iter}	39
Tol	3.29×10^{-8}
N_{int}	0.0 kN
$M_{z, \text{int}}$	2000.0 kN · m
$M_{y, \text{int}}$	500.0 kN · m
ε_0	3.693×10^{-3}
κ_x	-8.996×10^{-3}
κ_y	-0.833×10^{-3}

Pivô B: o concreto governa ($\varepsilon_c = -3.500\text{‰} = \varepsilon_{cu}$). Diâmetro necessário: $\varphi_s = 13.26 \text{ mm}$ (ELU biaxial).

Validação dos resultados

Verificação do equilíbrio interno

As cargas impostas (N, M_y, M_z) são a **entrada**. O SectionPro encontra o diâmetro φ_s e o estado de deformação correspondente ($\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z$) por resolução iterativa, integrando as tensões sobre a seção para obter as forças **internas** ($N_{\text{int}}, M_{y,\text{int}}, M_{z,\text{int}}$). Na convergência, estas devem coincidir com as cargas impostas:

$$N_{\text{int}} \approx N \quad M_{y,\text{int}} \approx M_y \quad M_{z,\text{int}} \approx M_z$$

Seção	Carga	N (kN)	N_{int} (kN)	M_z (kN·m)	$M_{z,\text{int}}$ (kN·m)	Δ
Hexagonal	ELS	500.0	500.0	1000.0	1000.0	0.00 %
	ELU	2000.0	2000.0	3000.0	3000.0	0.00 %
Quad. oca	ELS	-400.0	-400.0	900.0	900.0	0.00 %
	ELU	0.0	0.0	6000.0	6000.0	0.00 %
Viga em U	ELS	0.0	0.0	1500.0	1500.0	0.00 %
	ELU	0.0	0.0	2000.0	2000.0	0.00 %

O equilíbrio interno é satisfeito com precisão de máquina para todos os seis casos de carga — abrangendo três geometrias diferentes, três códigos normativos, e tanto leis de materiais lineares (ELS) quanto não lineares (ELU).

Referência cruzada com o Artigo #2

A tabela abaixo compara o fator de segurança do Artigo #2 (armadura fixa) com o φ_s necessário calculado neste artigo. O dimensionamento da armadura aplica um φ_s uniforme a todas as posições de barras.

Seção	Carga	φ_s (Art. #2)	FS (Art. #2)	Verif. (Art. #2)	Pivô	φ_s necessário
Hexagonal	ELS	25 mm	0.527	OK	A	17.6 mm
	ELU	25 mm	1.121	KO	B	25.1 mm
Quad. oca	ELS	20 mm	0.274	OK	A	10.0 mm
	ELU	20 mm	0.634	OK	B	19.4 mm
Viga em U	ELS	20/12 mm	1.209	KO	A	17.9 mm
	ELU	20/12 mm	0.436	OK	B	13.3 mm

Para seções com armadura uniforme (hexagonal e quadrada oca), a correlação é direta: $FS > 1$ implica $\varphi_{s,\text{necessário}} > \varphi_{s,\text{original}}$ e vice-versa. Para a viga em U, que possuía diâmetros mistos, a comparação deve ser feita com base na área total de aço e não apenas no φ_s .

Benchmark — 100.000 casos de carga

Para demonstrar a adequação do SectionPro ao dimensionamento sistemático, executamos 100.000 casos de carga em **cada uma das três seções** acima. Os casos combinam ELS e ELU, flexão uniaxial e biaxial. O benchmark mede o tempo de cálculo puro, excluindo overhead da interface.

Métrica	Hexagonal	Quadrada oca	Viga em U
Casos de carga	100.000	100.000	100.000
Tempo de cálculo	5,26 s	5,30 s	5,35 s
Taxa	19.000 cargas/s	18.900 cargas/s	18.700 cargas/s

As três seções completam em 5,3 s para 100.000 casos — taxas de 18.700 a 19.000 dimensionamentos/s. Mais lento que a verificação (Artigo #2): o dimensionamento adiciona um laço externo sobre φ_s , cada iteração exigindo resolução do estado de deformação ($\epsilon_0, \kappa_y, \kappa_z$). Convergência obtida para os 300.000 casos. O SectionPro dimensiona 100.000 casos em menos de 6 s.

Exportação

Resultados exportáveis em **PDF**, **texto** e **Excel** (.xlsx). Dados por caso de carga: tensões, deformações, pivô, φ_s , forças internas e convergência.

REINFORCEMENT DESIGN RESULTS
GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-03-13 13:49

Load case #2 is the most unfavorable

ϵ, σ and φ_s

φ_s is the calculated reinforcement diameter, σ and ϵ are the stresses and strains of concrete and steel (indices c and s). The pivot indicates the limit strain reached (A: steel, B: concrete, AS0: concrete alone sufficient).

Param	Unit	#2	#1
σ_c	MPa	-20.00	-11.30
$\sigma_{s,min}$	MPa	-435.21	-139.49
$\sigma_{s,max}$	MPa	440.81	400.00
ϵ_c	‰	-3.500	-0.847
$\epsilon_{s,min}$	‰	-2.766	-0.697
$\epsilon_{s,max}$	‰	10.455	2.000
Pivot	-	B	A
φ_s	mm	25.12	17.60

Internal forces

Nc and Nt are the compression and tension forces resulting from the integration of stresses over the section. The application coordinates of these forces are given by xy. The lever arm z is the distance between these forces.

Param	Unit	#2	#1
Nc	kN	5827.2	1697.8
Nt	kN	-3827.2	-1197.8
xC	m	-0.255	-0.000
yC	m	0.355	0.363
xT	m	0.082	0.000
yT	m	-0.243	-0.320
z	m	0.687	0.683

Convergence

Given below are the number of iterations necessary for convergence of the solution algorithm, the tolerance achieved, the internal forces (N,Mz,My) and the deformation state of the section ($\epsilon_0, \kappa_x, \kappa_y$).

Param	Unit	#2	#1
N.iter	-	43	4
Tol	-	3.66e-8	3.57e-8
N.int	kN	2000.0	500.00
Mz.int	kN-m	3000.0	1000.00
My.int	kN-m	1800.0	0.0
ϵ_0	‰	3.845	0.651
κ_x	‰	-14.689	-2.997
κ_y	‰	-1.556	-0.000

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

Figura 16: PDF — página 1: tabelas.

REINFORCEMENT DESIGN RESULTS
GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-03-13 13:49

Given below are figures representing graphically the previous tabular results.

Load case n°2: $\varphi_s = 25.12$ mm (σ, ϵ and Nc,Nt displayed below)

Load case n°1: $\varphi_s = 17.60$ mm (σ, ϵ and Nc,Nt displayed below)

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

Figura 17: PDF — página 2: figuras.

| Conclusão

Na prática, um engenheiro estrutural enfrenta dois problemas complementares: verificar uma seção com armadura conhecida — como abordado no Artigo #2 — ou determinar a armadura necessária para resistir a um conjunto de cargas dado. O recurso de dimensionamento aborda diretamente o segundo caso. Quando a disposição das barras é conhecida mas o diâmetro ainda não está definido, o SectionPro encontra o φ_s mínimo tal que a seção seja solicitada exatamente a 100% de sua capacidade sob os limites de deformação normativos. Isso fornece ao engenheiro a armadura estritamente mínima como ponto de partida, a partir do qual um diâmetro comercial pode ser selecionado.

Os resultados são consistentes com a formulação do problema inverso: equilíbrio interno satisfeito com precisão de máquina para todos os casos de carga, três geometrias diferentes, três códigos normativos, ELS e ELU. O solver converge de forma confiável em todos os casos. Quanto ao desempenho, o benchmark de 100.000 casos serve como limite superior — na prática, um engenheiro trabalha com algumas centenas de combinações de carga. Na taxa de 19.000 dimensionamentos por segundo, 500 combinações completam em menos de 30 milissegundos: o cálculo é essencialmente instantâneo.