



# Propriedades mecânicas

Tutorial SectionPro — Seção quadrada, circular vazada e parede em L

BridgeKernel · 2026

## Introdução

As propriedades mecânicas de uma seção — área, momentos de inércia, centro de gravidade, constante de torção, áreas de corte — são o ponto de partida de todo o cálculo de estruturas. Este artigo mostra como obtê-las com o **SectionPro**, em três geometrias diferentes:

- Seção quadrada** — caso mais simples, todas as propriedades são calculáveis analiticamente.
- Seção circular vazada** — a torção e a inércia permanecem analíticas, mas as áreas de corte exigem um cálculo numérico.
- Parede em L** — apenas as propriedades geométricas são analíticas. A torção, o corte e o empenamento são puramente numéricos. Esta seção ilustra o caso de uma geometria assimétrica ( $\alpha \neq 0$ ).

## Propriedades calculadas

O SectionPro calcula as seguintes propriedades. Os três primeiros grupos são calculados para a seção bruta, líquida (dedução dos vazios nos locais das armaduras) e homogeneizada (consideração das armaduras através do coeficiente de equivalência  $n$ ):

### Resultados gerais

$A$  — Área  
 $(z_G, y_G)$  — Centro de gravidade  
 $P$  — Perímetro  
 $W$  — Peso linear

### Referencial central

$I_{zz}, I_{yy}$  — Momentos de inércia  
 $v^+, v^-$  — Fibras extremas ( $y$ )  
 $w^+, w^-$  — Fibras extremas ( $z$ )

### Referencial principal

$\alpha$  — Ângulo de rotação  
 $I_1, I_2$  — Inércias principais  
 $v^+, v^-, w^+, w^-$  — Fibras extremas

### Torção e corte (MEF)

$J$  — Constante de torção  
 $A_{sy}, A_{sz}$  — Áreas de corte  
 $(y_T, z_T)$  — Centro de corte  
 $\Gamma$  — Constante de empenamento

As propriedades de torção e de corte exigem a resolução de uma equação diferencial pelo método dos elementos finitos.

# Secção quadrada

## Dados

### Betão

Lado  $a = 2.0$  m

Massa volúmica  $\rho = 2.5$  t/m<sup>3</sup>

### Armaduras

HA25 espaçamento 200 mm, recobrimento 50 mm

1 camada — coeficiente de equivalência  $n = 5$

## Introdução de dados e resultados

**Data**

Solid Square Section

**Concrete**

Side length (m)

2

**Reinforcement**

Mode: uniform spacing

Bar spacing (mm) 200 Bar diameter (mm) 25 Concrete cover (mm) 50 Layers (1 or 2) 1

Submit Infos

Figura 1: Introdução de dados da secção quadrada.

**Analysis**

Mechanical characteristics

Specify the equivalence coefficient  $n=Es/Ec$  for homogenized properties and the mesh refinement for torsion and shear computations.

$n = Es/Ec$  5 Mesh refinement Fine

Compute Export

**Section drawing**

General results

The area A, perimeter P, weight per linear meter W and the coordinates of the center of gravity (zG, yG) are given below:

Cara	Unit	Raw	Net	Homog.
A	m <sup>2</sup>	4.0000	3.9823	4.0707
zG	m	1.0000	1.0000	1.0000
yG	m	1.0000	1.0000	1.0000
P	m	8.0000	—	—
W	T/m	10.0000	—	—

Figura 2: Página de resultados das propriedades mecânicas.

Pela dupla simetria, o centro de gravidade situa-se no centro do quadrado, o ângulo principal é nulo e os dois momentos de inércia são iguais.

## Resultados gerais

	Unidade	Bruta	Líquida	Hom.
A	m <sup>2</sup>	4.0000	3.9823	4.0707
z <sub>G</sub>	m	1.0000	1.0000	1.0000
y <sub>G</sub>	m	1.0000	1.0000	1.0000
P	m	8.0000	—	—
W	T/m	10.0000	—	—

## Flexão

### 3.2.2.1 Referencial central

	Uni- dade	Bruta	Lí- quida	Hom.
$I_{zz}$	m <sup>4</sup>	1.3333	1.3226	1.3761
$I_{yy}$	m <sup>4</sup>	1.3333	1.3226	1.3761
$v^+$	m	1.0000	1.0000	1.0000
$v^-$	m	1.0000	1.0000	1.0000
$w^+$	m	1.0000	1.0000	1.0000
$w^-$	m	1.0000	1.0000	1.0000

### 3.2.2.2 Referencial principal

	Uni- dade	Bruta	Lí- quida	Hom.
$I_1$	m <sup>4</sup>	1.3333	1.3226	1.3761
$I_2$	m <sup>4</sup>	1.3333	1.3226	1.3761
$v^+$	m	1.0000	1.0000	1.0000
$v^-$	m	1.0000	1.0000	1.0000
$w^+$	m	1.0000	1.0000	1.0000
$w^-$	m	1.0000	1.0000	1.0000
$\alpha$	°	0.00	0.00	0.00

## Torção e corte (MEF)

Pela dupla simetria, o centro de corte coincide com o centro de gravidade ( $y_T = z_T = y_G = z_G = 1.0$  m). O empenamento é praticamente nulo ( $\Gamma \approx 0$ ). A relação  $A_{sz}/A = 3.33/4.00 \approx 0.83$ , típica de uma secção maciça.

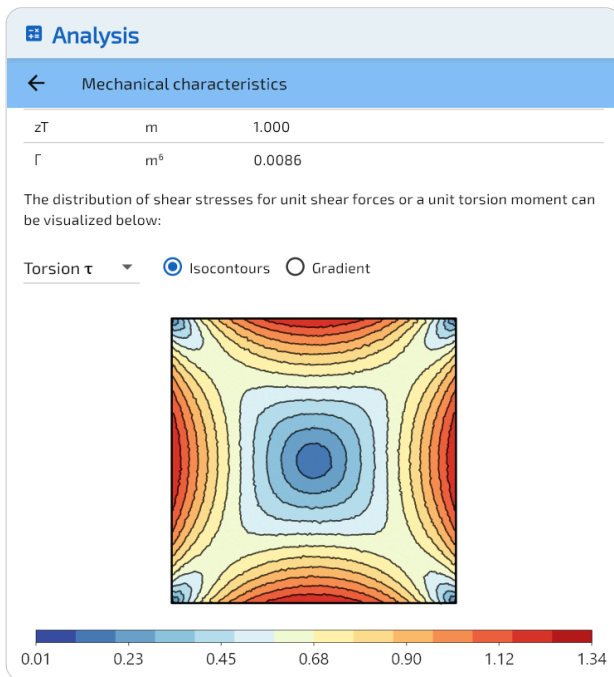


Figura 3: Tensões de torção  $\tau$  — máximo a meio dos lados.

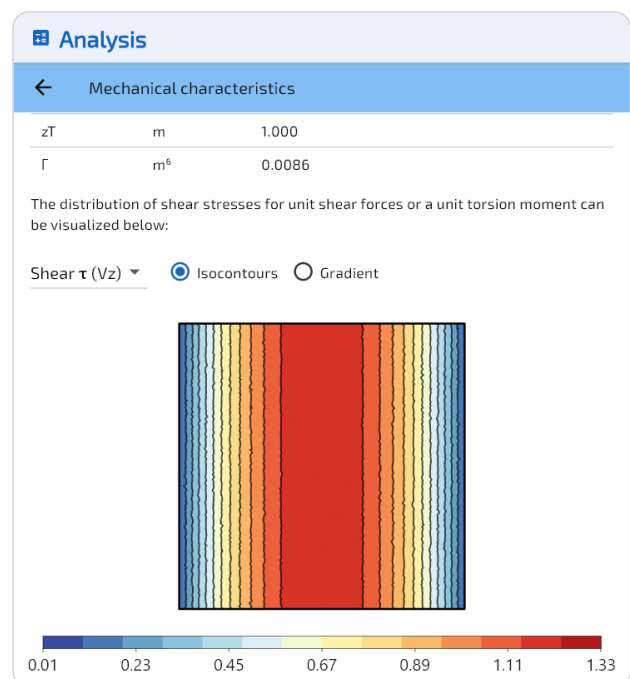


Figura 4: Tensões de corte.

	$J$	$A_{sz}$	$A_{sy}$	$y_T$	$z_T$	$\Gamma$
Unidade	m <sup>4</sup>	m <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	m	m	m <sup>6</sup>
Valor	2.2492	3.3333	3.3333	1.0000	1.0000	0.0086

# Secção circular vazada

## Dados

### Betão

Diâmetro exterior  $D = 2.0$  m  
Espessura da parede  $e = 0.3$  m  
Massa volúmica  $\rho = 2.5$  t/m<sup>3</sup>

### Armaduras

24 HA20, recobrimento 50 mm  
1 camada — coeficiente de equivalência  $n = 5$

## Introdução de dados e resultados

**Data**

Hollow Circular Section

**Concrete**

Outer diameter (m)  Wall thickness (m)

**Reinforcement** ⓘ

Mode: **count**

Number of rebars  Bar diameter (mm)  Concrete cover (mm)  Layers (1 or 2)

**Submit** **Infos**

Figura 5: Introdução de dados da secção circular vazada.

**Analysis**

Mechanical characteristics

**General results**

The area  $A$ , perimeter  $P$ , weight per linear meter  $W$  and the coordinates of the center of gravity ( $z_G$ ,  $y_G$ ) are given below:

Cara	Unit	Raw	Net	Homog.
$A$	m <sup>2</sup>	1.6022	1.5871	1.6625
$z_G$	m	1.000	1.000	1.000
$y_G$	m	1.000	1.000	1.000
$P$	m	6.283	-	-
$W$	T/m	4.005	-	-

$z_G$  and  $y_G$  are given respectively with respect to the extreme fiber on the left and at the bottom of the section.

**Centroidal reference frame**

The central reference frame is positioned at the center of gravity of the gross section. The  $z$ -axis is horizontal, oriented to the right and the  $y$ -axis is vertical, oriented upwards.

The moments of inertia  $I_{zz}$  and  $I_{yy}$ , as well as the distances of the extreme fibers at the top ( $v^+$ ), at the bottom ( $v^-$ ), to the right ( $w^+$ ) and to the left ( $w^-$ ) with respect to this reference frame are given below:

Cara	Unit	Raw	Net	Homog.
$I_{zz}$	m <sup>4</sup>	0.5968	0.5913	0.6189
$I_{yy}$	m <sup>4</sup>	0.5968	0.5913	0.6189
$v^+$	m	1.000	1.000	1.000
$v^-$	m	1.000	1.000	1.000
$w^+$	m	1.000	1.000	1.000
$w^-$	m	1.000	1.000	1.000

Figura 6: Página de resultados das propriedades mecânicas.

Pela simetria circular, as inércias são iguais e o ângulo principal é indeterminado (apresentado como 0°).

## Resultados gerais

	Unidade	Bruta	Líquida	Hom.
$A$	m <sup>2</sup>	1.6022	1.5871	1.6625
$z_G$	m	1.0000	1.0000	1.0000
$y_G$	m	1.0000	1.0000	1.0000
$P$	m	6.2832	—	—
$W$	T/m	4.0055	—	—

## Flexão

### 4.2.2.1 Referencial central

	Uni- dade	Bruta	Lí- quida	Hom.
$I_{zz}$	m <sup>4</sup>	0.5968	0.5913	0.6189
$I_{yy}$	m <sup>4</sup>	0.5968	0.5913	0.6189
$v^+$	m	1.0000	1.0000	1.0000
$v^-$	m	1.0000	1.0000	1.0000
$w^+$	m	1.0000	1.0000	1.0000
$w^-$	m	1.0000	1.0000	1.0000

### 4.2.2.2 Referencial principal

	Uni- dade	Bruta	Lí- quida	Hom.
$I_1$	m <sup>4</sup>	0.5968	0.5913	0.6189
$I_2$	m <sup>4</sup>	0.5968	0.5913	0.6189
$v^+$	m	1.0000	1.0000	1.0000
$v^-$	m	1.0000	1.0000	1.0000
$w^+$	m	1.0000	1.0000	1.0000
$w^-$	m	1.0000	1.0000	1.0000
$\alpha$	°	0.00	0.00	0.00

## Torção e corte (MEF)

Pela simetria de revolução, o centro de corte coincide com o centro de gravidade ( $y_T = z_T = y_G = z_G = 1.0$  m) e o empenamento é nulo ( $\Gamma = 0$ ). A relação  $A_{sz}/A = 0.84/1.60 \approx 0.53$ : a secção vazada é menos eficiente ao corte do que uma secção maciça.

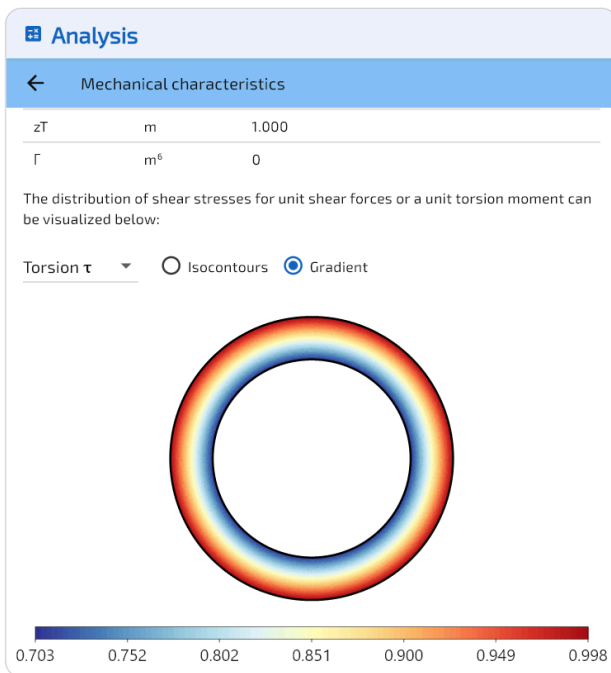


Figura 7: Tensões de torção  $\tau$  — máximo no contorno exterior.

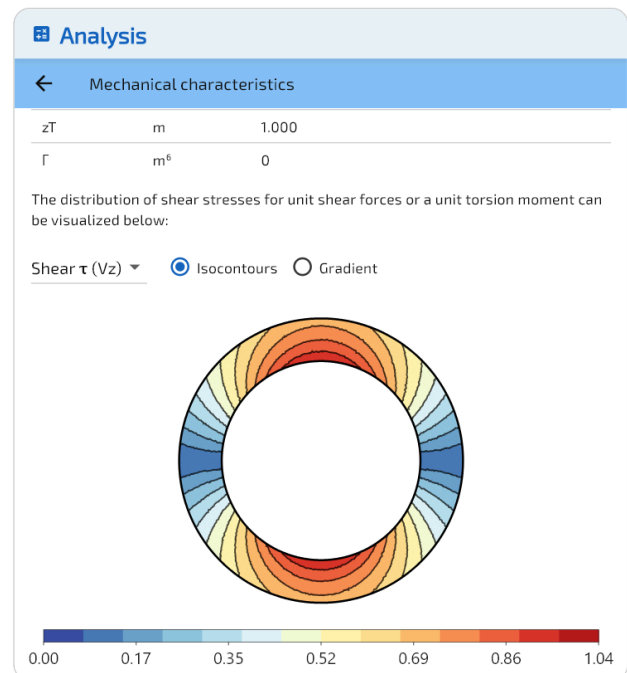


Figura 8: Tensões de corte.

	$J$	$A_{sz}$	$A_{sy}$	$y_T$	$z_T$	$\Gamma$
Unidade	m <sup>4</sup>	m <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	m	m	m <sup>6</sup>
Valor	1.1936	0.8422	0.8422	1.0000	1.0000	0.0000

# Parede em L

## Dados

### Betão

Tipo L — largura 2.0 m, altura 2.0 m

Espessura  $t = 0.3$  m

Massa volúmica  $\rho = 2.5$  t/m<sup>3</sup>

### Armaduras

HA20 espaçamento 200 mm, recobrimento 40 mm

1 camada — coeficiente de equivalência  $n = 5$

## Introdução de dados e resultados

Figura 9: Introdução de dados da parede em L.

Cara	Unit	Raw	Net	Homog.
A	m <sup>2</sup>	1.1100	1.0974	1.1603
z <sub>G</sub>	m	0.609	0.609	0.610
y <sub>G</sub>	m	0.609	0.609	0.610
P	m	8.000	-	-
W	T/m	2.775	-	-

Figura 10: Página de resultados das propriedades mecânicas.

Sendo os banzos de igual comprimento,  $I_{zz} = I_{yy}$  e o ângulo principal é exactamente  $\alpha = 45^\circ$ .

## Resultados gerais

	Unidade	Bruta	Líquida	Hom.
A	m <sup>2</sup>	1.1100	1.0974	1.1603
z <sub>G</sub>	m	0.6095	0.6093	0.6100
y <sub>G</sub>	m	0.6095	0.6093	0.6100
P	m	8.0000	—	—
W	T/m	2.7750	—	—

## Flexão

### 5.2.2.1 Referencial central

	Uni- dade	Bruta	Lí- quida	Hom.
$I_{zz}$	m <sup>4</sup>	0.4030	0.3981	0.4225
$I_{yy}$	m <sup>4</sup>	0.4030	0.3981	0.4225
$v^+$	m	1.3905	1.3907	1.3900
$v^-$	m	0.6095	0.6093	0.6100
$w^+$	m	1.3905	1.3907	1.3900
$w^-$	m	0.6095	0.6093	0.6100

### 5.2.2.2 Referencial principal

	Uni- dade	Bruta	Lí- quida	Hom.
$I_1$	m <sup>4</sup>	0.6373	0.6297	0.6679
$I_2$	m <sup>4</sup>	0.1687	0.1666	0.1771
$v^+$	m	1.4142	1.4142	1.4142
$v^-$	m	1.4142	1.4142	1.4142
$w^+$	m	0.7644	0.7644	0.7644
$w^-$	m	0.8619	0.8619	0.8619
$\alpha$	°	45.00	45.00	45.00

## Torção e corte (MEF)

O centro de corte ( $y_T = z_T = 0.16$  m) está deslocado para o canto reentrante, longe do centro de gravidade ( $y_G = z_G = 0.61$  m). O empenamento é significativo ( $\Gamma = 0.009$  m<sup>6</sup>). A constante de torção  $J = 0.032$  m<sup>4</sup> é muito baixa — típica de um perfil aberto de parede fina. A relação  $A_{sz}/A = 0.50/1.11 \approx 0.45$ .

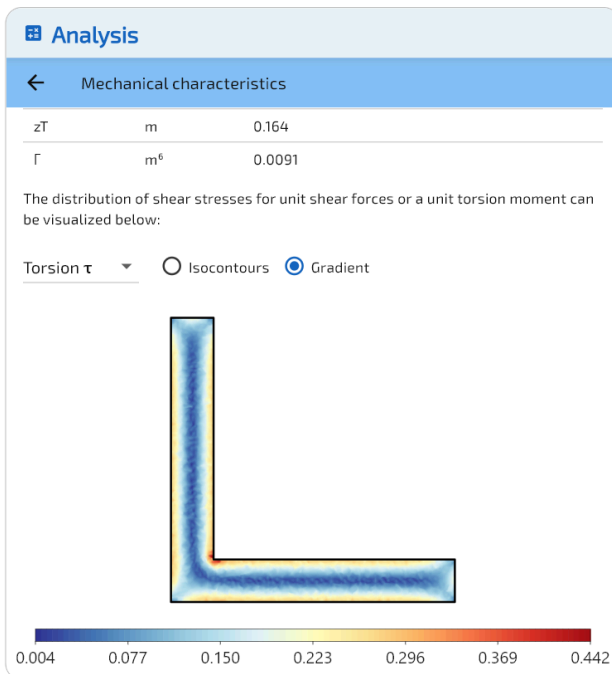


Figura 11: Tensões de torção  $\tau$  — singularidade no canto reentrante. Centro de corte deslocado.

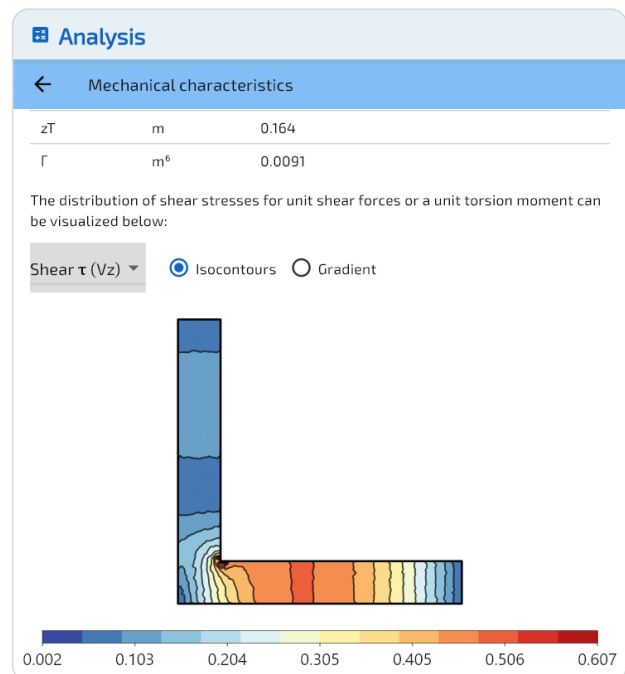


Figura 12: Tensões de corte.

	$J$	$A_{sz}$	$A_{sy}$	$y_T$	$z_T$	$\Gamma$
Unidade	m <sup>4</sup>	m <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	m	m	m <sup>6</sup>

	$J$	$A_{sz}$	$A_{sy}$	$y_T$	$z_T$	$\Gamma$
Valor	0.0322	0.5037	0.5037	0.1637	0.1637	0.0091

# Validação dos resultados

Os resultados do SectionPro são validados de duas formas: por comparação com **fórmulas analíticas** (quando existem) e por **comparação cruzada** com um software de referência que utiliza um solver de elementos finitos independente.

## Resumo das fórmulas analíticas

Secção quadrada ( $a = 2.0$  m)

$$A = a^2 = 4.0000 \quad I = \frac{a^4}{12} = 1.3333 \quad J = 0.1406a^4 = 2.2489 \quad A_s = \frac{5}{6}A = 3.3333$$

A constante de torção é obtida pelas séries de Saint-Venant:

$$J = \frac{a^4}{3} \left[ 1 - \frac{192}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh(n\pi/2)}{n^5} \right]$$

Secção circular vazada ( $R = 1.0$  m,  $r = 0.7$  m)

$$A = \pi(R^2 - r^2) = 1.6022 \quad I = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) = 0.5968 \quad J = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = 1.1936$$

As áreas de corte não possuem fórmula simples; a equação diferencial deve ser resolvida numericamente.

Parede em L ( $L = 2.0$  m,  $t = 0.3$  m)

Por decomposição (banzo  $2.0 \times 0.3$  + alma  $0.3 \times 1.7$ ) e teorema de Steiner:

$$A = 1.1100 \quad z_G = y_G = 0.6095 \quad I_{zz} = I_{yy} = 0.4030 \quad \alpha = 45^\circ$$

Não existe fórmula analítica exacta para a torção, o corte e o empenamento. A teoria de Vlasov (perfis abertos de parede fina) fornece, contudo, uma ordem de grandeza:  $J \approx \frac{1}{3}(2L - t)t^3 = 0.0333$  m<sup>4</sup> e o centro de corte situa-se aproximadamente na intersecção das linhas médias dos banzos ( $y_T \approx z_T \approx t/2 = 0.15$  m). Estas estimativas pressupõem uma espessura infinitamente pequena relativamente ao comprimento dos banzos; aqui  $t/L = 15\%$ , e os efeitos de espessura — nomeadamente o enrijecimento da junção no canto — deslocam os valores reais relativamente a este modelo simplificado.

## Secções líquida e homogeneizada

Para uma secção armada com  $N$  varões de aço de secção  $A_{s,i}$  nas coordenadas  $(z_{s,i}, y_{s,i})$ , com um coeficiente de equivalência  $n$ :

$$A_{\text{net}} = A - \sum_{i=1}^N A_{s,i} \quad A_{\text{hom}} = A + (n - 1) \sum_{i=1}^N A_{s,i}$$

O centro de gravidade desloca-se ligeiramente (fórmula análoga para  $z_G$ ):

$$y_{G,\text{net}} = \frac{A \cdot y_G - \sum_i A_{s,i} y_{s,i}}{A_{\text{net}}} \quad y_{G,\text{hom}} = \frac{A \cdot y_G + (n - 1) \sum_i A_{s,i} y_{s,i}}{A_{\text{hom}}}$$

A inércia deduz-se pelo teorema de Steiner, tendo em conta o deslocamento  $\Delta y_G$  entre o centro de gravidade da secção considerada e o da secção bruta:

$$I_{zz,\text{net}} = I_{zz} + A(\Delta y_G)^2 - \sum_i A_{s,i} (y_{s,i} - y_{G,\text{net}})^2$$

$$I_{zz,\text{hom}} = I_{zz} + A(\Delta y_G)^2 + (n-1) \sum_i A_{s,i} (y_{s,i} - y_{G,\text{hom}})^2$$

## Validação — Propriedades de flexão

As fórmulas analíticas acima foram aplicadas às três secções utilizando as coordenadas exactas das armaduras exportadas pelo SectionPro. Todos os resultados coincidem.

Secção	Propriedade	Bruta	$\Delta$	Líquida	$\Delta$	Hom.	$\Delta$
Quadrada	$A$ (m <sup>2</sup> )	4.0000	0.00 %	3.9823	0.00 %	4.0707	0.00 %
	$z_G, y_G$ (m)	1.0000	0.00 %	1.0000	0.00 %	1.0000	0.00 %
	$I_{zz}, I_{yy}$ (m <sup>4</sup> )	1.3333	0.00 %	1.3226	0.00 %	1.3761	0.00 %
Circ. vazada	$A$ (m <sup>2</sup> )	1.6022	0.00 %	1.5871	0.00 %	1.6625	0.00 %
	$z_G, y_G$ (m)	1.0000	0.00 %	1.0000	0.00 %	1.0000	0.00 %
	$I_{zz}, I_{yy}$ (m <sup>4</sup> )	0.5968	0.00 %	0.5913	0.00 %	0.6189	0.00 %
Parede em L	$A$ (m <sup>2</sup> )	1.1100	0.00 %	1.0974	0.00 %	1.1603	0.00 %
	$z_G, y_G$ (m)	0.6095	0.00 %	0.6093	0.00 %	0.6100	0.00 %
	$I_{zz}, I_{yy}$ (m <sup>4</sup> )	0.4030	0.00 %	0.3981	0.00 %	0.4225	0.00 %

## Validação — Torção e corte (comparação cruzada)

As propriedades de torção e corte, calculadas por elementos finitos, são comparadas com um software de referência que utiliza um solver independente.

Secção	Propriedade	Analítico	SectionPro	$\Delta$	Ref.	$\Delta$
Quadrada	$J$ (m <sup>4</sup> )	2.2489	2.2492	0.01 %	2.2585	0.41 %
	$A_{sz}, A_{sy}$ (m <sup>2</sup> )	3.3333	3.3333	0.00 %	3.3355	0.07 %
	$y_T, z_T$ (m)	1.0000	1.0000	0.00 %	1.0000	0.00 %
Circ. vazada	$J$ (m <sup>4</sup> )	1.1936	1.1936	0.00 %	1.1920	0.13 %
	$A_{sz}, A_{sy}$ (m <sup>2</sup> )	—	0.8422	—	0.8418	—
	$y_T, z_T$ (m)	1.0000	1.0000	0.00 %	1.0000	0.00 %
Parede em L	$J$ (m <sup>4</sup> )	—	0.0322	—	0.0328	—
	$A_{sz}$ (m <sup>2</sup> )	—	0.5037	—	0.5054	—
	$A_{sy}$ (m <sup>2</sup> )	—	0.5037	—	0.5024	—
	$y_T, z_T$ (m)	—	0.1637	—	0.1639	—

**Parede em L** — A teoria de Vlasov ( $J \approx 0.033$  m<sup>4</sup>,  $y_T \approx 0.15$  m) fornece uma ordem de grandeza comparável, mas permanece uma aproximação pois considera segmentos sem espessura (enquanto  $t/L = 15\%$ ).

## Conclusão

Secção	Validação	Desvio flexão	Desvio torção (ref.)
Quadrada	Analítico	0.00 %	0.41 %
Circ. vazada	Analítico + referência ( $A_{sy}, A_{sz}$ )	0.00 %	0.13 %
Parede em L	Analítico + referência ( $J, A_{sy}, A_{sz}, y_T, z_T$ )	0.00 %	1.86 %

As propriedades de flexão (área, centro de gravidade, momentos de inércia) são reproduzidas com precisão perfeita nas três geometrias, em secção bruta, líquida e homogeneizada (desvio de 0.00 % relativamente às fórmulas analíticas).

As propriedades de torção e de corte, calculadas por elementos finitos, dependem da fineza da malha. A comparação cruzada com um software de referência mostra uma concordância muito boa entre os dois solvers. O SectionPro apresenta, contudo, uma melhor convergência, como evidenciado pela sua correspondência exacta com as soluções analíticas de torção e de corte quando estas existem.