



Charakterystyki mechaniczne

Poradnik SectionPro — Przekrój kwadratowy, kołowy drażony i ściana w kształcie L

BridgeKernel · 2026

Wprowadzenie

Charakterystyki mechaniczne przekroju — pole powierzchni, momenty bezwładności, środek ciężkości, stała skręcania, pola ścinania — stanowią punkt wyjścia każdego obliczenia konstrukcyjnego. Niniejszy artykuł pokazuje, jak uzyskać je za pomocą **SectionPro**, na trzech różnych geometriach:

- Przekrój kwadratowy** — najprostszy przypadek, wszystkie właściwości można obliczyć analitycznie.
- Przekrój kołowy drażony** — skręcanie i bezwładność pozostają analityczne, ale pola ścinania wymagają obliczeń numerycznych.
- Ściana w kształcie L** — tylko właściwości geometryczne są analityczne. Skręcanie, ścinanie i spaczenie są czysto numeryczne. Ten przekrój ilustruje przypadek geometrii asymetrycznej ($\alpha \neq 0$).

Obliczane właściwości

SectionPro oblicza następujące właściwości. Trzy pierwsze grupy są obliczane dla przekroju brutto, netto (odliczenie otworów w miejscach zbrojenia) oraz sprowadzonego (uwzględnienie zbrojenia przez współczynnik równoważności n):

Wyniki ogólne

A — Pole powierzchni
 (z_G, y_G) — Środek ciężkości
 P — Obwód
 W — Ciężar liniowy

Układ centralny

I_{zz}, I_{yy} — Momenty bezwładności
 v^+, v^- — Włókna skrajne (y)
 w^+, w^- — Włókna skrajne (z)

Układ główny

α — Kąt obrotu
 I_1, I_2 — Główne momenty bezwładności
 v^+, v^-, w^+, w^- — Włókna skrajne

Skręcanie i ścinanie (MES)

J — Stała skręcania
 A_{sy}, A_{sz} — Pola ścinania
 (y_T, z_T) — Środek ścinania
 Γ — Stała spaczenia

Charakterystyki skręcania i ścinania wymagają rozwiązania równania różniczkowego metodą elementów skończonych.

Przekrój kwadratowy

Dane

Beton

Bok $a = 2.0$ m

Gęstość $\rho = 2.5$ t/m³

Zbrojenie

HA25 rozstaw 200 mm, otulina 50 mm

1 warstwa — współczynnik równoważności $n = 5$

Wprowadzanie danych i wyniki

Data

Solid Square Section

Concrete

Side length (m)

2

Reinforcement

Mode: uniform spacing

Bar spacing (mm) 200 Bar diameter (mm) 25 Concrete cover (mm) 50 Layers (1 or 2) 1

Submit Infos

Rysunek 1: Wprowadzanie danych przekroju kwadratowego.

Analysis

Mechanical characteristics

Specify the equivalence coefficient $n=Es/Ec$ for homogenized properties and the mesh refinement for torsion and shear computations.

$n = Es/Ec$ 5 Mesh refinement Fine

Compute Export

Section drawing

General results

The area A , perimeter P , weight per linear meter W and the coordinates of the center of gravity (z_G , y_G) are given below:

Cara	Unit	Raw	Net	Homog.
A	m ²	4.0000	3.9823	4.0707
z_G	m	1.0000	1.0000	1.0000
y_G	m	1.0000	1.0000	1.0000
P	m	8.0000	—	—
W	T/m	10.0000	—	—

Rysunek 2: Strona wyników charakterystyk mechanicznych.

Dzięki podwójnej symetrii środek ciężkości znajduje się w centrum kwadratu, kąt główny jest zerowy, a oba momenty bezwładności są równe.

Wyniki ogólne

	Jednostka	Brutto	Netto	Sprow.
A	m ²	4.0000	3.9823	4.0707
z_G	m	1.0000	1.0000	1.0000
y_G	m	1.0000	1.0000	1.0000
P	m	8.0000	—	—
W	T/m	10.0000	—	—

Zginanie

3.2.2.1 Układ centralny

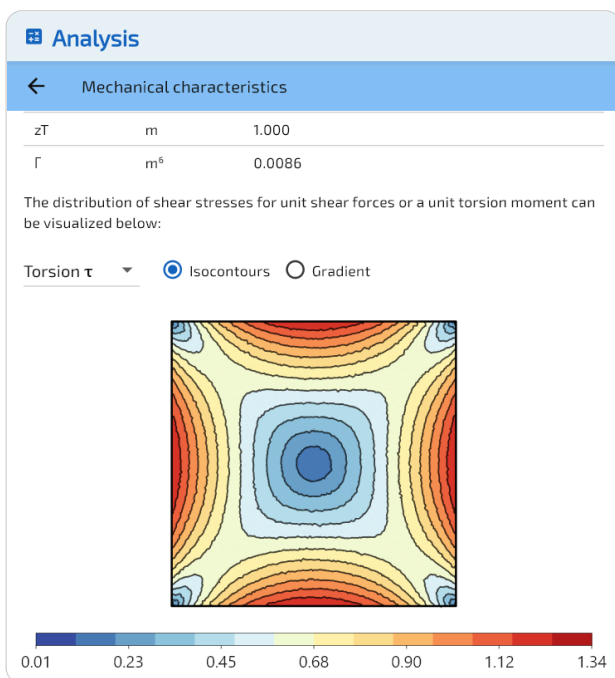
	Jed-nostka	Brut-to	Netto	Sprow.
I_{zz}	m ⁴	1.3333	1.3226	1.3761
I_{yy}	m ⁴	1.3333	1.3226	1.3761
v^+	m	1.0000	1.0000	1.0000
v^-	m	1.0000	1.0000	1.0000
w^+	m	1.0000	1.0000	1.0000
w^-	m	1.0000	1.0000	1.0000

3.2.2.2 Układ główny

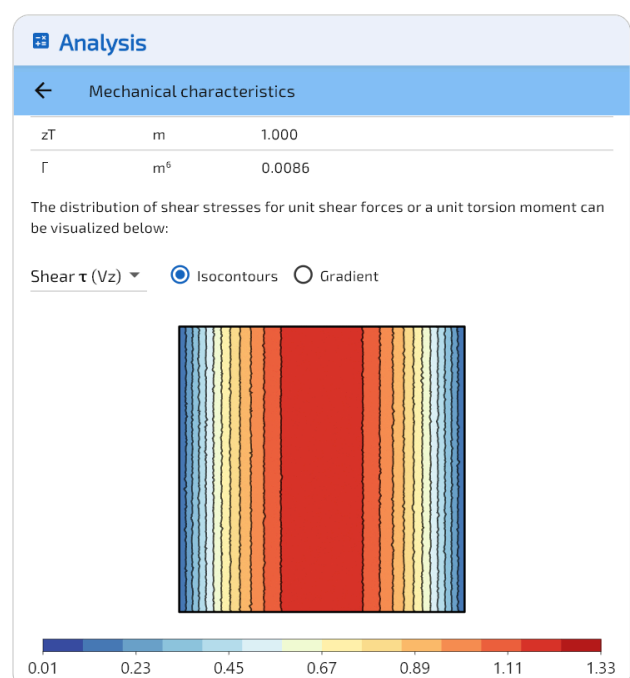
	Jed-nostka	Brut-to	Netto	Sprow.
I_1	m ⁴	1.3333	1.3226	1.3761
I_2	m ⁴	1.3333	1.3226	1.3761
v^+	m	1.0000	1.0000	1.0000
v^-	m	1.0000	1.0000	1.0000
w^+	m	1.0000	1.0000	1.0000
w^-	m	1.0000	1.0000	1.0000
α	°	0.00	0.00	0.00

Skręcanie i ścinanie (MES)

Dzięki podwójnej symetrii środek ścinania pokrywa się ze środkiem ciężkości ($y_T = z_T = y_G = z_G = 1.0$ m). Spaczenie jest prawie zerowe ($\Gamma \approx 0$). Stosunek $A_{sz}/A = 3.33/4.00 \approx 0.83$, typowy dla przekroju pełnego.



Rysunek 3: Naprężenia skręcające τ — maksimum w połowie boków.



Rysunek 4: Naprężenia ścinające.

	J	A_{sz}	A_{sy}	y_T	z_T	Γ
Jednostka	m ⁴	m ²	m ²	m	m	m ⁶
Wartość	2.2492	3.3333	3.3333	1.0000	1.0000	0.0086

Przekrój kołowy drażony

Dane

Beton

Średnica zewnętrzna $D = 2.0$ m

Grubość ścianki $e = 0.3$ m

Gęstość $\rho = 2.5$ t/m³

Zbrojenie

24 HA20, otulina 50 mm

1 warstwa — współczynnik równoważności $n = 5$

Wprowadzanie danych i wyniki

Data

Hollow Circular Section

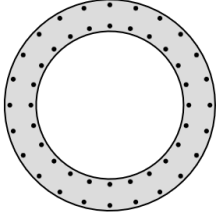
Concrete

Outer diameter (m): Wall thickness (m):

Reinforcement

Mode: **count**

Number of rebars: Bar diameter (mm): Concrete cover (mm): Layers (1 or 2):



Rysunek 5: Wprowadzanie danych przekroju kołowego drażonego.

Analysis

Mechanical characteristics

General results

The area A , perimeter P , weight per linear meter W and the coordinates of the center of gravity (z_G , y_G) are given below:

Cara	Unit	Raw	Net	Homog.
A	m ²	1.6022	1.5871	1.6625
z_G	m	1.000	1.000	1.000
y_G	m	1.000	1.000	1.000
P	m	6.283	-	-
W	T/m	4.005	-	-

z_G and y_G are given respectively with respect to the extreme fiber on the left and at the bottom of the section.

Centroidal reference frame

The central reference frame is positioned at the center of gravity of the gross section. The z -axis is horizontal, oriented to the right and the y -axis is vertical, oriented upwards.

The moments of inertia I_{zz} and I_{yy} , as well as the distances of the extreme fibers at the top (v^+), at the bottom (v^-), to the right (w^+) and to the left (w^-) with respect to this reference frame are given below:

Cara	Unit	Raw	Net	Homog.
I_{zz}	m ⁴	0.5968	0.5913	0.6189
I_{yy}	m ⁴	0.5968	0.5913	0.6189
v^+	m	1.000	1.000	1.000
v^-	m	1.000	1.000	1.000
w^+	m	1.000	1.000	1.000
w^-	m	1.000	1.000	1.000

Rysunek 6: Strona wyników charakterystyk mechanicznych.

Dzięki symetrii kołowej momenty bezwładności są równe, a kąt główny jest nieokreślony (wyświetlany jako 0°).

Wyniki ogólne

	Jednostka	Brutto	Netto	Sprow.
A	m ²	1.6022	1.5871	1.6625
z_G	m	1.0000	1.0000	1.0000
y_G	m	1.0000	1.0000	1.0000
P	m	6.2832	—	—
W	T/m	4.0055	—	—

Zginanie

4.2.2.1 Układ centralny

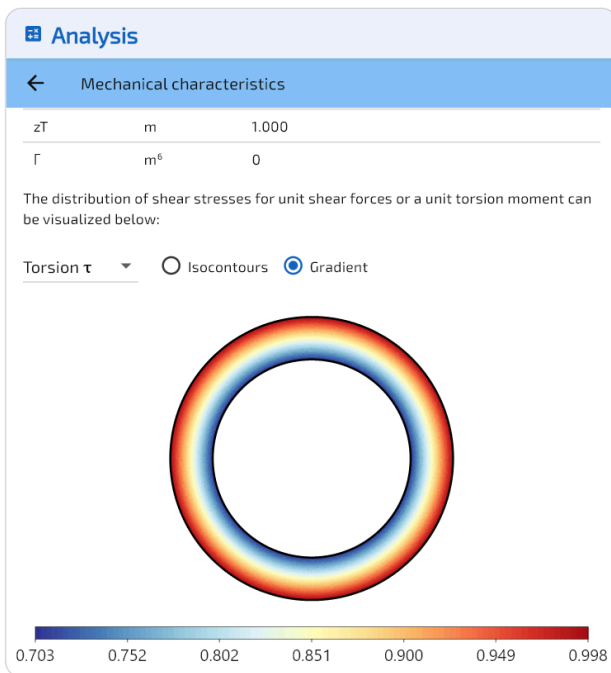
	Jed-nostka	Brut-to	Netto	Sprow.
I_{zz}	m ⁴	0.5968	0.5913	0.6189
I_{yy}	m ⁴	0.5968	0.5913	0.6189
v^+	m	1.0000	1.0000	1.0000
v^-	m	1.0000	1.0000	1.0000
w^+	m	1.0000	1.0000	1.0000
w^-	m	1.0000	1.0000	1.0000

4.2.2.2 Układ główny

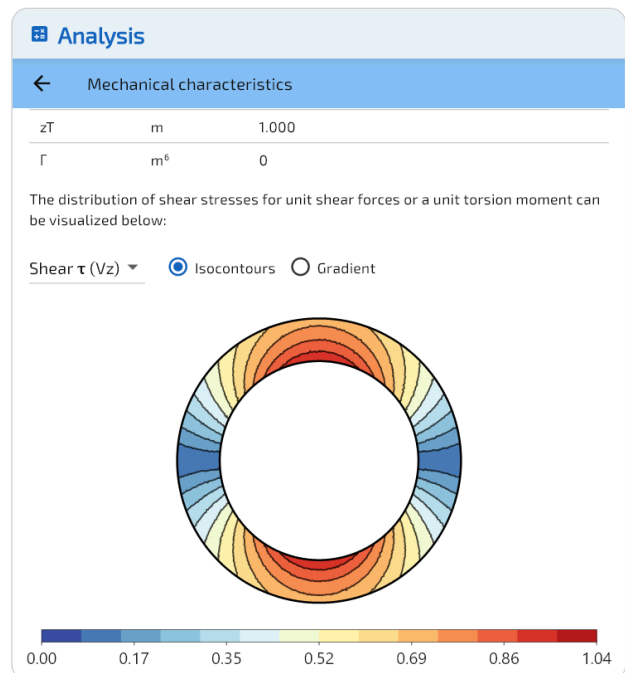
	Jed-nostka	Brut-to	Netto	Sprow.
I_1	m ⁴	0.5968	0.5913	0.6189
I_2	m ⁴	0.5968	0.5913	0.6189
v^+	m	1.0000	1.0000	1.0000
v^-	m	1.0000	1.0000	1.0000
w^+	m	1.0000	1.0000	1.0000
w^-	m	1.0000	1.0000	1.0000
α	°	0.00	0.00	0.00

Skręcanie i ścinanie (MES)

Dzięki symetrii obrotowej środek ścinania pokrywa się ze środkiem ciężkości ($y_T = z_T = y_G = z_G = 1.0$ m), a spaczenie jest zerowe ($\Gamma = 0$). Stosunek $A_{sz}/A = 0.84/1.60 \approx 0.53$: przekrój drażony jest mniej efektywny w ścinaniu niż przekrój pełny.



Rysunek 7: Naprężenia skręcające τ — maksimum na kon-turze zewnętrznym.



Rysunek 8: Naprężenia ścinające.

	J	A_{sz}	A_{sy}	y_T	z_T	Γ
Jednostka	m ⁴	m ²	m ²	m	m	m ⁶
Wartość	1.1936	0.8422	0.8422	1.0000	1.0000	0.0000

Ściana w kształcie L

Dane

Beton

Kształt L — szerokość 2.0 m, wysokość 2.0 m

Grubość $t = 0.3$ m

Gęstość $\rho = 2.5$ t/m³

Zbrojenie

HA20 rozstaw 200 mm, otulina 40 mm

1 warstwa — współczynnik równoważności $n = 5$

Wprowadzanie danych i wyniki

Data

Walls

Concrete

Type: L

Width (m): 2

Height (m): 2

Thickness (m): 0.3

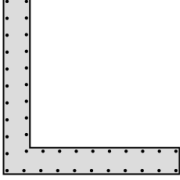
Reinforcement

Bar spacing (mm): 200

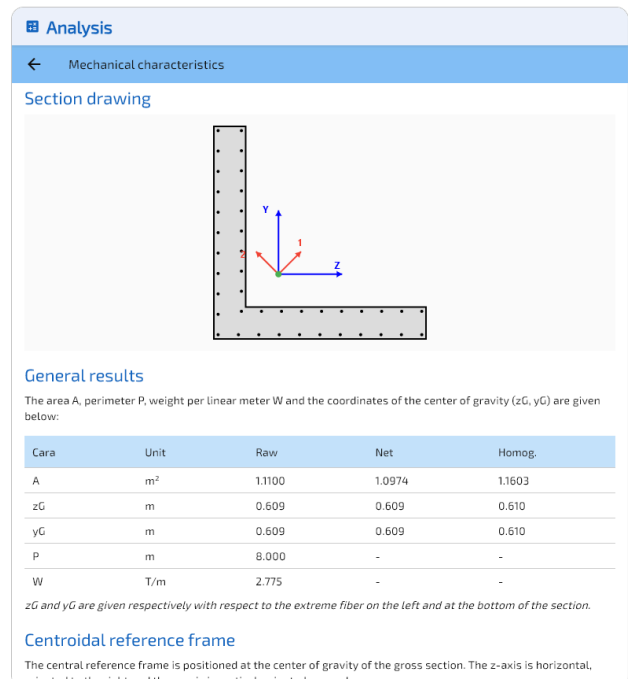
Bar diameter (mm): 20

Concrete cover (mm): 40

Submit
↻ 90°
Infos



Rysunek 9: Wprowadzanie danych ściany w kształcie L.



Rysunek 10: Strona wyników charakterystyk mechanicznych.

Ponieważ ramiona mają tę samą długość, $I_{zz} = I_{yy}$, a kąt główny wynosi dokładnie $\alpha = 45^\circ$.

Wyniki ogólne

	Jednostka	Brutto	Netto	Sprow.
A	m ²	1.1100	1.0974	1.1603
z _G	m	0.6095	0.6093	0.6100
y _G	m	0.6095	0.6093	0.6100
P	m	8.0000	—	—
W	T/m	2.7750	—	—

Zginanie

5.2.2.1 Układ centralny

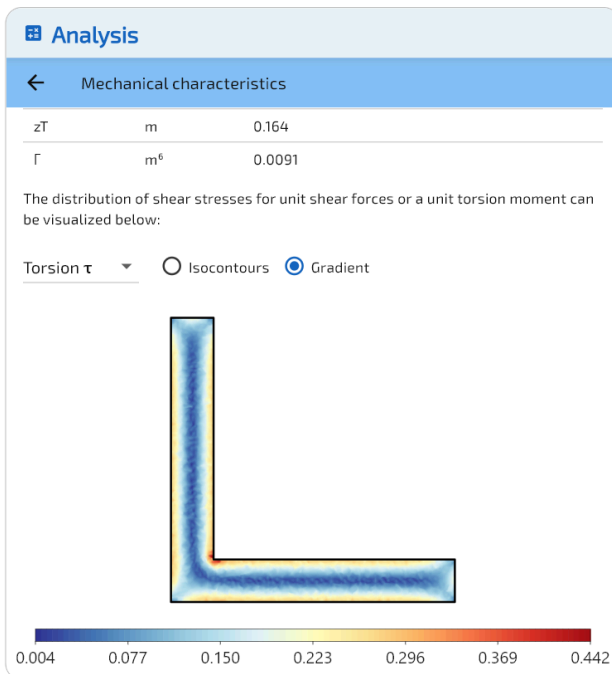
	Jed-nostka	Brut-to	Netto	Sprow.
I_{zz}	m ⁴	0.4030	0.3981	0.4225
I_{yy}	m ⁴	0.4030	0.3981	0.4225
v^+	m	1.3905	1.3907	1.3900
v^-	m	0.6095	0.6093	0.6100
w^+	m	1.3905	1.3907	1.3900
w^-	m	0.6095	0.6093	0.6100

5.2.2.2 Układ główny

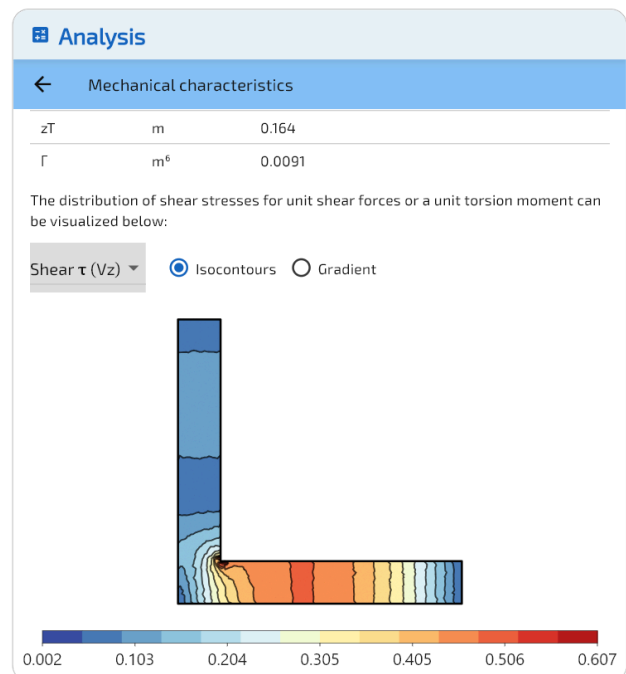
	Jed-nostka	Brut-to	Netto	Sprow.
I_1	m ⁴	0.6373	0.6297	0.6679
I_2	m ⁴	0.1687	0.1666	0.1771
v^+	m	1.4142	1.4142	1.4142
v^-	m	1.4142	1.4142	1.4142
w^+	m	0.7644	0.7644	0.7644
w^-	m	0.8619	0.8619	0.8619
α	°	45.00	45.00	45.00

Skręcanie i ścinanie (MES)

Środek ścinania ($y_T = z_T = 0.16$ m) jest przesunięty w stronę narożnika wklęsłego, daleko od środka ciężkości ($y_G = z_G = 0.61$ m). Spaczenie jest znaczące ($\Gamma = 0.009$ m⁶). Stała skręcania $J = 0.032$ m⁴ jest bardzo mała — typowa dla otwartego profilu cienkościennego. Stosunek $A_{sz}/A = 0.50/1.11 \approx 0.45$.



Rysunek 11: Naprężenia skręcające τ — osobliwość w narożniku wklęsłym. Przesunięty środek ścinania.



Rysunek 12: Naprężenia ścinające.

	J	A_{sz}	A_{sy}	y_T	z_T	Γ
Jednostka	m ⁴	m ²	m ²	m	m	m ⁶

	J	A_{sz}	A_{sy}	y_T	z_T	Γ
Wartość	0.0322	0.5037	0.5037	0.1637	0.1637	0.0091

Walidacja wyników

Wyniki SectionPro są walidowane na dwa sposoby: przez porównanie z **wzorami analitycznymi** (gdzie istnieją) oraz przez **porównanie krzyżowe** z oprogramowaniem referencyjnym wykorzystującym niezależny solver elementów skończonych.

Przypomnienie wzorów analitycznych

Przekrój kwadratowy ($a = 2.0$ m)

$$A = a^2 = 4.0000 \quad I = \frac{a^4}{12} = 1.3333 \quad J = 0.1406a^4 = 2.2489 \quad A_s = \frac{5}{6}A = 3.3333$$

Stała skręcania jest otrzymywana z szeregów Saint-Venanta:

$$J = \frac{a^4}{3} \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh(n\pi/2)}{n^5} \right]$$

Przekrój kołowy drażony ($R = 1.0$ m, $r = 0.7$ m)

$$A = \pi(R^2 - r^2) = 1.6022 \quad I = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) = 0.5968 \quad J = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = 1.1936$$

Pola ścinania nie mają prostego wzoru; równanie różniczkowe musi być rozwiązane numerycznie.

Ściana w kształcie L ($L = 2.0$ m, $t = 0.3$ m)

Przez dekompozycję (półka 2.0×0.3 + środek 0.3×1.7) i twierdzenie Steinera:

$$A = 1.1100 \quad z_G = y_G = 0.6095 \quad I_{zz} = I_{yy} = 0.4030 \quad \alpha = 45^\circ$$

Nie istnieje dokładny wzór analityczny na skręcanie, ścinanie i spaczenie. Teoria Własowa (profile otwarte cienkościennie) dostarcza jednak rzędu wielkości: $J \approx \frac{1}{3}(2L - t)t^3 = 0.0333$ m⁴, a środek ścinania znajduje się w przybliżeniu na przecięciu linii środkowych ramion ($y_T \approx z_T \approx t/2 = 0.15$ m). Szacunki te zakładają nieskończenie małą grubość w porównaniu z długością ramion; tutaj $t/L = 15\%$, a efekty grubości — w szczególności usztywnienie węzła w narożniku — przesuwają wartości rzeczywiste w stosunku do tego uproszczonego modelu.

Przekrój netto i sprowadzony

Dla przekroju zbrojonego N prętami o polu $A_{s,i}$ o współrzędnych $(z_{s,i}, y_{s,i})$, ze współczynnikiem równoważności n :

$$A_{\text{net}} = A - \sum_{i=1}^N A_{s,i} \quad A_{\text{hom}} = A + (n-1) \sum_{i=1}^N A_{s,i}$$

Środek ciężkości przesuwa się nieznacznie (wzór analogiczny dla z_G):

$$y_{G,\text{net}} = \frac{A \cdot y_G - \sum_i A_{s,i} y_{s,i}}{A_{\text{net}}} \quad y_{G,\text{hom}} = \frac{A \cdot y_G + (n-1) \sum_i A_{s,i} y_{s,i}}{A_{\text{hom}}}$$

Moment bezwładności wyznacza się z twierdzenia Steinera, uwzględniając przesunięcie Δy_G między środkiem ciężkości rozpatrywanego przekroju a środkiem ciężkości przekroju brutto:

$$I_{zz,\text{net}} = I_{zz} + A(\Delta y_G)^2 - \sum_i A_{s,i} (y_{s,i} - y_{G,\text{net}})^2$$

$$I_{zz,\text{hom}} = I_{zz} + A(\Delta y_G)^2 + (n-1) \sum_i A_{s,i} (y_{s,i} - y_{G,\text{hom}})^2$$

Walidacja — Właściwości zginania

Powyższe wzory analityczne zostały zastosowane do trzech przekrojów z użyciem dokładnych współrzędnych zbrojenia wyeksportowanych przez SectionPro. Wszystkie wyniki są zgodne.

Przekrój	Właściwość	Brutto	Δ	Netto	Δ	Sprow.	Δ
Kwadratowy	A (m ²)	4.0000	0.00 %	3.9823	0.00 %	4.0707	0.00 %
	z_G, y_G (m)	1.0000	0.00 %	1.0000	0.00 %	1.0000	0.00 %
	I_{zz}, I_{yy} (m ⁴)	1.3333	0.00 %	1.3226	0.00 %	1.3761	0.00 %
Koł. drążony	A (m ²)	1.6022	0.00 %	1.5871	0.00 %	1.6625	0.00 %
	z_G, y_G (m)	1.0000	0.00 %	1.0000	0.00 %	1.0000	0.00 %
	I_{zz}, I_{yy} (m ⁴)	0.5968	0.00 %	0.5913	0.00 %	0.6189	0.00 %
Ściana L	A (m ²)	1.1100	0.00 %	1.0974	0.00 %	1.1603	0.00 %
	z_G, y_G (m)	0.6095	0.00 %	0.6093	0.00 %	0.6100	0.00 %
	I_{zz}, I_{yy} (m ⁴)	0.4030	0.00 %	0.3981	0.00 %	0.4225	0.00 %

Walidacja — Skręcanie i ścinanie (porównanie krzyżowe)

Właściwości skręcania i ścinania, obliczone metodą elementów skończonych, są porównywane z oprogramowaniem referencyjnym wykorzystującym niezależny solver.

Przekrój	Właściwość	Analityczny	SectionPro	Δ	Ref.	Δ
Kwadratowy	J (m ⁴)	2.2489	2.2492	0.01 %	2.2585	0.41 %
	A_{sz}, A_{sy} (m ²)	3.3333	3.3333	0.00 %	3.3355	0.07 %
	y_T, z_T (m)	1.0000	1.0000	0.00 %	1.0000	0.00 %
Koł. drążony	J (m ⁴)	1.1936	1.1936	0.00 %	1.1920	0.13 %
	A_{sz}, A_{sy} (m ²)	—	0.8422	—	0.8418	—
	y_T, z_T (m)	1.0000	1.0000	0.00 %	1.0000	0.00 %
Ściana L	J (m ⁴)	—	0.0322	—	0.0328	—
	A_{sz} (m ²)	—	0.5037	—	0.5054	—
	A_{sy} (m ²)	—	0.5037	—	0.5024	—
	y_T, z_T (m)	—	0.1637	—	0.1639	—

Ściana w kształcie L — Teoria Własowa ($J \approx 0.033$ m⁴, $y_T \approx 0.15$ m) daje porównywalny rząd wielkości, ale pozostaje przybliżeniem, ponieważ zakłada segmenty bez grubości (podczas gdy $t/L = 15\%$).

Wnioski

Przekrój	Walidacja	Odch. zginanie	Odch. skręcanie (ref.)
Kwadratowy	Analityczny	0.00 %	0.41 %
Koł. drażony	Analityczny + referencja (A_{sy} , A_{sz})	0.00 %	0.13 %
Ściana L	Analityczny + referencja (J , A_{sy} , A_{sz} , y_T , z_T)	0.00 %	1.86 %

Właściwości zginania (pole powierzchni, środek ciężkości, momenty bezwładności) są odtworzone z idealną dokładnością dla trzech geometrii, w przekroju brutto, netto i sprowadzonym (odchylenie 0.00 % od wzorów analitycznych).

Właściwości skręcania i ścinania, obliczone metodą elementów skończonych, zależą od gęstości siatki. Porównanie krzyżowe z oprogramowaniem referencyjnym wykazuje bardzo dobrą zgodność między oboma solverami. SectionPro wykazuje jednak lepszą zbieżność, o czym świadczy dokładna zgodność z rozwiązaniami analitycznymi skręcania i ścinania, gdy te istnieją.