



# Verificação de Resistência com Superfícies de Interação

Tutorial SectionPro: verificação em lote de combinações de carga face ao domínio de resistência 3D

BridgeKernel · 2026

## Introdução

No artigo anterior, calculámos a superfície de interação, o domínio de resistência 3D de uma secção de betão armado no espaço  $(N, M_z, M_y)$ . O solver tensão-deformação (Artigo #2) pode verificar cargas individuais face a este domínio, mas o engenheiro tem de inspecionar os resultados um a um, ou apenas o caso mais desfavorável, sem uma visão global de como todas as combinações se situam face à capacidade.

O módulo de distâncias resolve isto projectando cada ponto de carga na superfície de interação e mostrando o resultado num gráfico de dispersão 3D. Para cada carga, devolve um estado (interior, exterior ou fronteira) e um fator  $\eta$  que quantifica a margem. Um olhar revela quais as cargas seguras, quais excedem a capacidade e em quanto.

Uma vantagem adicional diz respeito a normas com blocos rectangulares equivalentes (bloco Whitney ACI 318, CSA A23.3, AASHTO). O solver tensão-deformação deve usar a lei realista (parábola-rectângulo), pois um bloco de tensão não conduz um solver iterativo. A superfície é construída directamente com o bloco Whitney, tornando o módulo de distâncias mais fiel à lei de dimensionamento dessas normas.

A contrapartida: o módulo de distâncias não devolve o estado de deformação nem a distribuição de tensões. Responde a “passa ou falha, e por quanto?” mas não a “qual é a tensão em cada fibra?”.

## Resultados calculados

O SectionPro apresenta três categorias de resultados por distâncias:

### Estado e fator de segurança

$\eta$ : distância normalizada  
Estado: **Interno** **Externo**  
Carga mais desfavorável identi-

### Visualização 3D

Superfície de interação (malha triangulada)  
Pontos de carga no gráfico de dispersão

### Exportações

PDF: vistas 3D + tabela de resultados  
XLS: cargas, distâncias, estado

cada  
Uma superfície por estado limite

Cor por estado  
Rotação, zoom, pan

TXT: resultados tabulares (colunas)

## Esta abordagem vs. a análise tensão-deformação

A tabela seguinte resume as diferenças entre os dois métodos de verificação disponíveis no SectionPro.

Critério	Distâncias (este artigo)	Tensão-deformação (Artigo #2)
Objetivo	Triagem passa/falha	Estado detalhado
Saída	$\eta$ + estado	$\sigma$ , $\varepsilon$ , FS, forças
Estado de deformação	Não	Sim
Saída visual	Dispersão 3D	Diagramas tensão/deformação
Melhor para	Grandes envelopes de carga	Casos de carga críticos
Bloco Whitney	Recomendado	Usar lei realista
Poucas cargas	Custo da superfície	Rápido (resolução directa)
Muitas cargas	Rápido (superfície reutilizada)	Lento (iterativo por carga)

As duas abordagens são complementares. Um fluxo típico: (1) usar distâncias para triagem de todo o envelope de carga e identificar as combinações críticas; (2) usar o solver tensão-deformação nesses casos para obter a resposta completa da secção.

## Como funcionam as distâncias

Dado um ponto de carga  $P = (N, M_z, M_y)$  e a superfície de interação  $\mathcal{S}$ , o módulo calcula o centroide  $O$  da malha (garantidamente no interior do domínio) e traça um raio de  $O$  através de  $P$  até interseção  $\mathcal{S}$  num ponto  $Q$ . O fator de segurança é definido como:

$$\eta = \frac{\|\overrightarrow{OP}\|}{\|\overrightarrow{OQ}\|}$$

A interpretação é directa:

- $\eta < 1$ : o ponto de carga está **dentro** da superfície; a secção tem capacidade de reserva.
- $\eta = 1$ : o ponto de carga está **na fronteira** a secção está no seu limite exacto.
- $\eta > 1$ : o ponto de carga está **fora** da superfície; a capacidade é excedida.

No gráfico 3D, os pontos têm cor conforme o estado: **verde** para cargas internas ( $\eta < 1$ ) e **vermelho** para externas ( $\eta > 1$ ).

A superfície é calculada uma vez por estado limite; cada ponto de carga requer apenas uma intersecção raio-superfície, com custo negligenciável face à convergência iterativa do solver tensão-deformação.

# Secção octagonal (Eurocódigo 2)

## Dados de entrada

A geometria da secção, armadura e leis dos materiais são idênticas às do Artigo #4 (Superfície de Interação). São definidas 30 combinações de carga: 15 em ELU-F (Fundamental) e 15 em ELS-C (Característico), cobrindo força axial pura, flexão biaxial pura, carga combinada, tracção e compressão.

### Betão

- Secção transversal octagonal
- $b_1 = 2.00$  m,  $b_2 = 0.50$  m
- $h_1 = 1.00$  m,  $h_2 = 0.60$  m

### Armadura

- 48 varões, espaçamento uniforme 150 mm
- Diâmetro  $\varphi = 32$  mm, recobrimento 50 mm

### Leis dos materiais (EC2)

- Betão C30/37:  $f_{ck} = 30$  MPa
- Aço B500B:  $f_{yk} = 500$  MPa

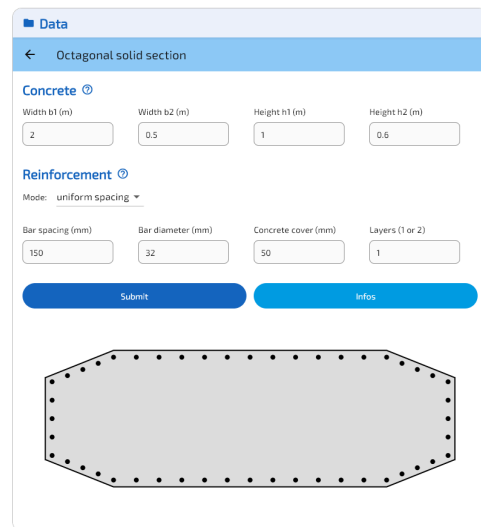


Figura 1: Secção octagonal: geometria e disposição da armadura.

## ELU-F (Fundamental)

15 combinações de carga: 8 internas, 7 externas.

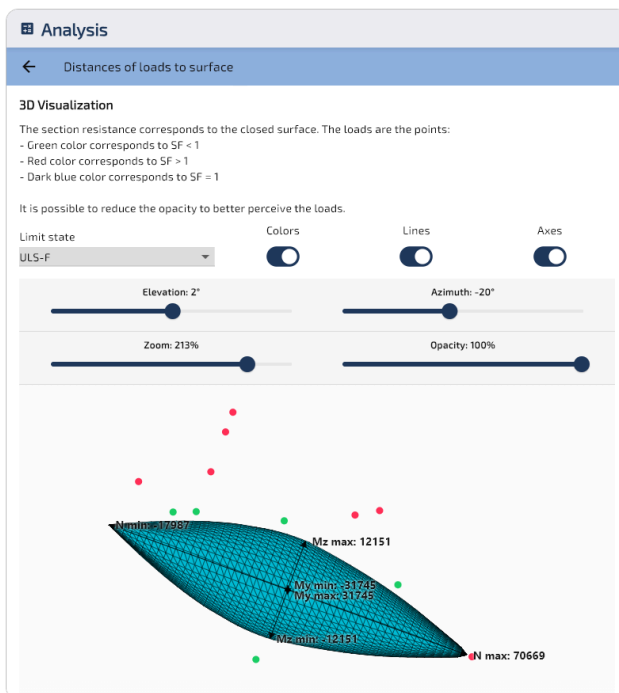


Figura 2: ELU-F: cargas dispersas na superfície (vista 1).

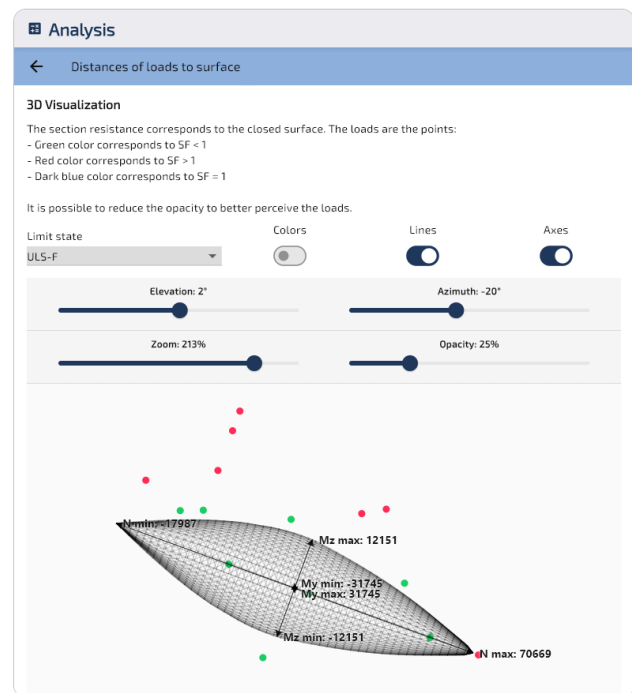


Figura 3: ELU-F: cargas dispersas na superfície (vista 2).

Carga	$N$ (kN)	$M_z$ (kN·m)	$M_y$ (kN·m)	$\eta$ (-)	Estado
8	0	14 000	35 000	1.879	Externo
7	0	11 000	30 000	1.605	Externo
4	72 000	0	0	1.030	Externo
5	0	5 000	10 000	0.916	Interno
3	60 000	0	0	0.761	Interno
2	30 000	0	0	0.088	Interno

A carga #4 ( $N = 72000$  kN, compressão pura) excede ligeiramente a superfície ( $r_{\text{norm}} = 1.030$ ), confirmando que  $N_{\text{max}} = 70669$  kN do Artigo #4 é correcto. A carga #2 ( $N = 30000$  kN) está profundamente no interior ( $r_{\text{norm}} = 0.088$ ), como esperado para uma carga bem abaixo de  $N_{\text{max}}$ .

As cargas combinadas mostram a forma não cúbica da superfície: a carga #8 ( $M_z = 14000$ ,  $M_y = 35000$ ) tem componentes de momento abaixo dos limites da caixa delimitadora ( $M_{z,\text{max}} = 12154$ ,  $M_{y,\text{max}} = 32317$ ), mas a combinação coloca o ponto fora da superfície ( $r_{\text{norm}} = 1.879$ ).

## ELS-C (Característico)

15 combinações de carga: 6 internas, 9 externas.

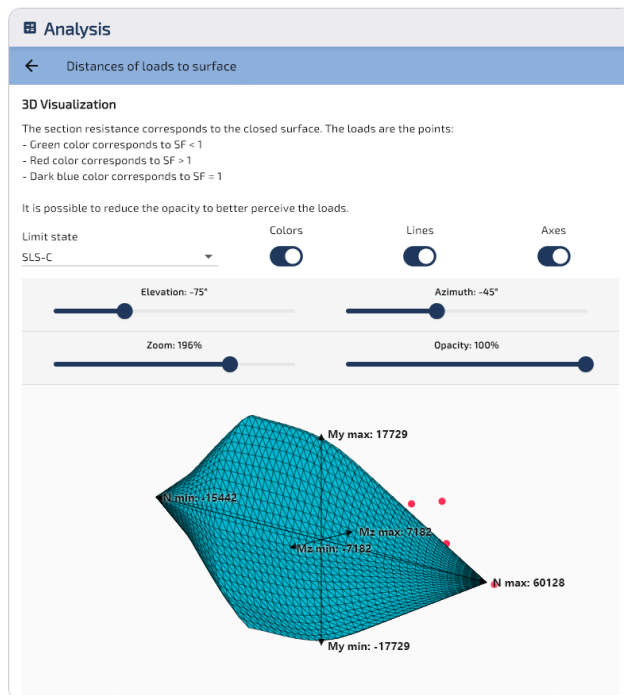


Figura 4: ELS-C: cargas dispersas na superfície (vista 1).

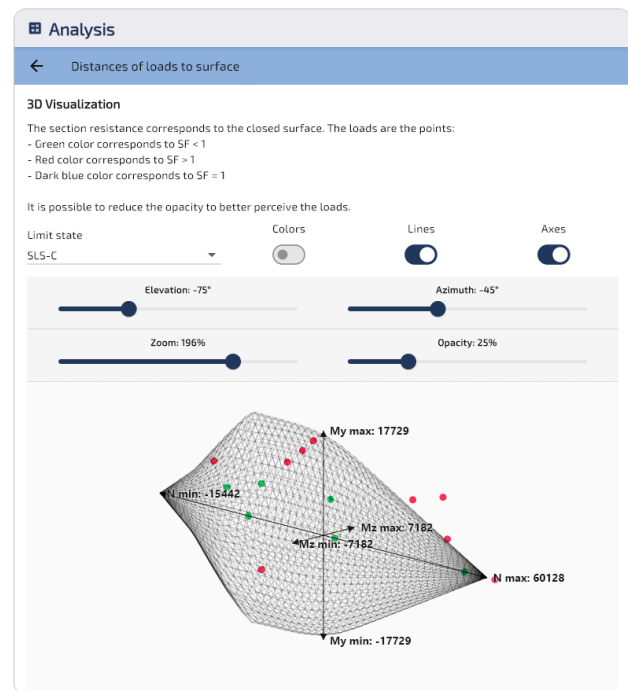


Figura 5: ELS-C: cargas dispersas na superfície (vista 2).

Carga	$N$ (kN)	$M_z$ (kN·m)	$M_y$ (kN·m)	$\eta$ (-)	Estado
23	0	8 000	20 000	1.910	Externo
26	35 000	6 000	15 000	1.795	Externo
19	62 000	0	0	1.050	Externo
27	-5 000	2 000	5 000	0.990	Interno
18	55 000	0	0	0.866	Interno
17	25 000	0	0	0.081	Interno

**Nota:** Para identificar melhor os pontos de carga internos ocultos atrás da superfície, reduza a opacidade da superfície ou mude para o modo wireframe (ambas as opções estão disponíveis no visualizador 3D).

## Secção elíptica (ACI 318)

### Dados de entrada

A geometria da secção, armadura e leis dos materiais são idênticas às do Artigo #4. São definidas 30 combinações de carga: 15 em ELU e 15 em ELS.

### Betão

- Secção transversal elíptica
- Largura = 3.00 m, Altura = 2.00 m

### Armadura

- 40 varões ao longo do perímetro
- Diâmetro  $\varphi = 40$  mm, recobrimento 50 mm

### Leis dos materiais (ACI 318)

- Betão:  $f'_c = 30$  MPa
- Aço:  $f_y = 500$  MPa

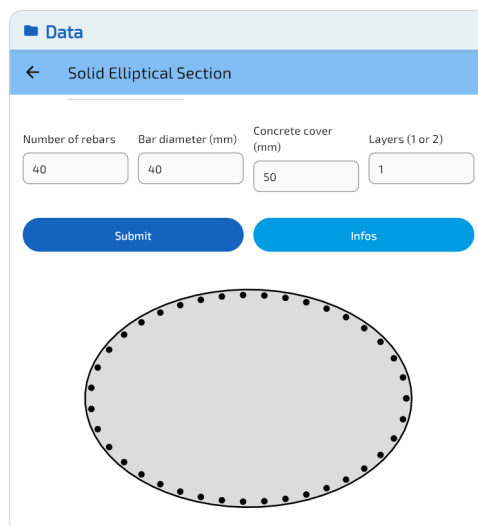


Figura 6: Secção elíptica: geometria e armadura.

## ELU

15 combinações de carga: 8 internas, 7 externas.

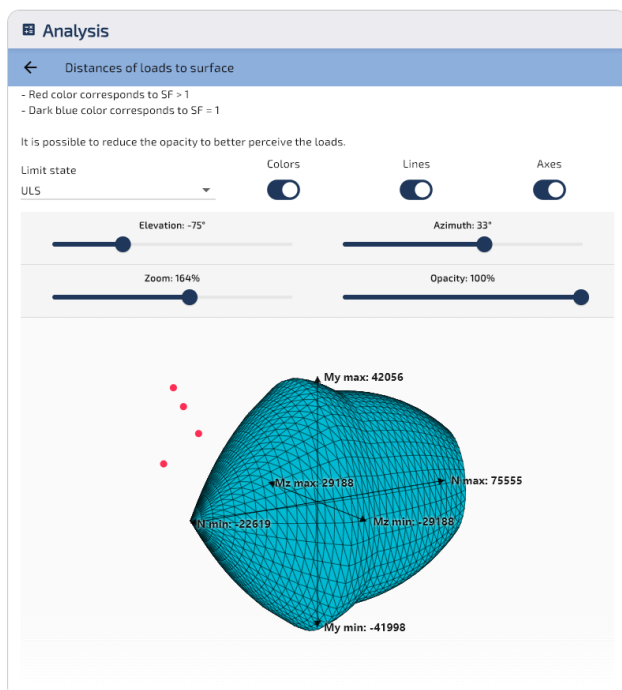


Figura 7: ELU: cargas dispersas na superfície (vista 1).

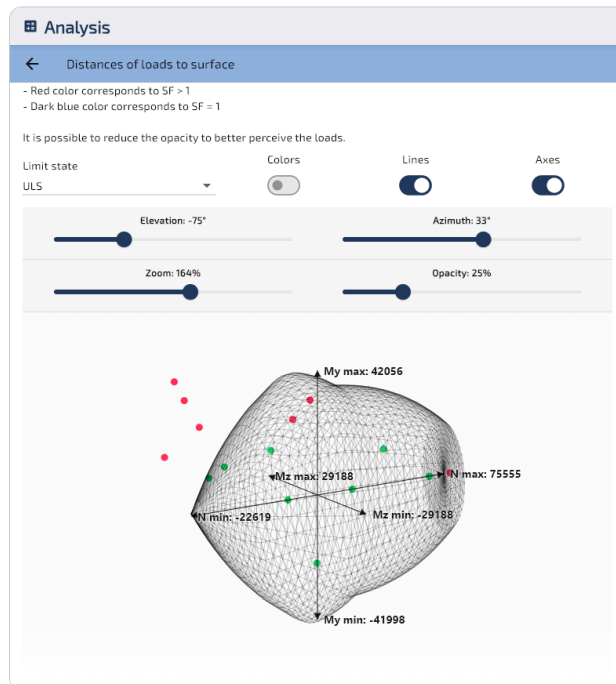


Figura 8: ELU: cargas dispersas na superfície (vista 2).

Carga	$N$ (kN)	$M_z$ (kN·m)	$M_y$ (kN·m)	$\eta$ (-)	Estado
8	0	32 000	45 000	1.646	Externo
7	0	27 000	39 000	1.475	Externo
4	78 000	0	0	1.067	Externo
15	10 000	-15 000	-25 000	0.967	Interno
3	70 000	0	0	0.847	Interno
2	40 000	0	0	0.022	Interno

Os fatores  $\varphi$  do ACI ( $\varphi = 0.65$  a  $0.90$ ) e o limite  $\varphi_N = 0.80$  reduzem a capacidade nominal, tornando a superfície ELU mais pequena. Do Artigo #4:  $N_{\max} = 75555$  kN,  $M_{z,\max} = 29188$  kN·m,  $M_{y,\max} = 42056$  kN·m; exceder qualquer destes limites garante a falha, como nas cargas #4 e #8. A carga #7 ( $M_z = 27000$ ,  $M_y = 39000$  kN·m) respeita os três limites mas está fora da superfície ( $\eta = 1.475$ ): a caixa delimitadora não detecta este caso, a superfície 3D detecta.

## ELS

15 combinações de carga: 7 internas, 8 externas.

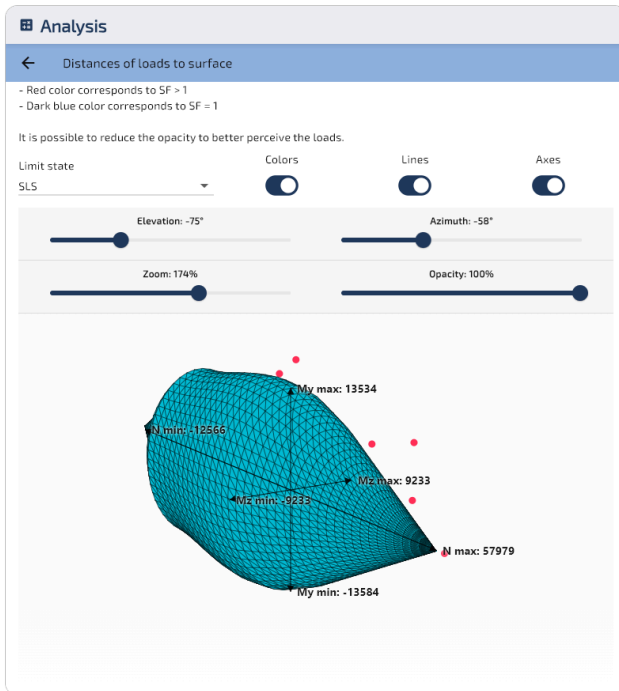


Figura 9: ELS: cargas dispersas na superfície (vista 1).

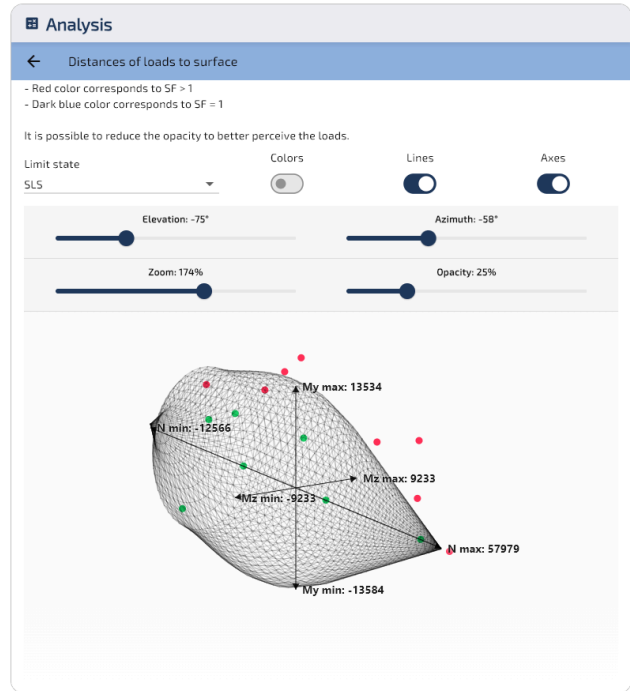


Figura 10: ELS: cargas dispersas na superfície (vista 2).

Carga	$N$ (kN)	$M_z$ (kN·m)	$M_y$ (kN·m)	$\eta$ (-)	Estado
23	0	10 000	15 000	1.688	Externo
26	35 000	7 500	11 000	1.487	Externo
19	60 000	0	0	1.068	Externo
27	-4 000	2 500	3 500	0.942	Interno
18	53 000	0	0	0.868	Interno
17	30 000	0	0	0.216	Interno

Em ELS, o betão está limitado à tensão admissível ( $\sigma_c = 11.5$  MPa), resultando numa superfície muito menor que em ELU. A carga #23 é a mais desfavorável ( $r_{\text{norm}} = 1.688$ ): a flexão biaxial combinada

( $M_z = 10000$ ,  $M_y = 15000$  kN·m) excede largamente a capacidade ELS, mesmo que cada componente individualmente estivesse dentro da caixa delimitadora.

## Validação cruzada com o solver tensão-deformação

O módulo de distâncias projecta pontos de carga numa malha pré-construída da superfície. O solver NR (Newton-Raphson, Artigo #2) itera para encontrar o estado de equilíbrio de cada carga individualmente. Os dois métodos devem concordar: uma carga interior ( $\eta < 1$ ) deve satisfazer todos os limites de extensão; uma exterior ( $\eta > 1$ ) deve violar pelo menos um.

### Comparação de 15 cargas (secção octagonal, ELU-F)

Para cada carga, a tabela fornece o resultado das distâncias ( $\eta$  e estado Interno/Externo), seguido da saída do solver: pior extensão do betão  $\varepsilon_c$  e do aço  $\varepsilon_s$  (ambas em ‰, valores absolutos), e o resultado material correspondente.

Carga	$N$ (kN)	$M_z$ (kN·m)	$M_y$ (kN·m)	$\eta$ (-)	Estado	$\varepsilon_c$ (‰)	$\varepsilon_s$ (‰)	Resultado
1	10 000	0	0	0.390	Interno	0.17	0.17	OK
2	30 000	0	0	0.072	Interno	0.54	0.54	OK
3	60 000	0	0	0.757	Interno	1.36	1.36	OK
4	72 000	0	0	1.031	Externo	2.17	2.17	KO
5	0	5 000	10 000	0.920	Interno	1.50	3.13	OK
6	0	8 000	20 000	1.224	Externo	18.0	73.6	KO
7	0	11 000	30 000	1.584	Externo	26.2	112	KO
8	0	14 000	35 000	1.864	Externo	33.3	140	KO
9	20 000	5 000	15 000	0.691	Interno	1.66	1.58	OK
10	35 000	8 000	22 000	1.108	Externo	4.65	4.43	KO
11	40 000	10 000	25 000	1.365	Externo	6.93	6.59	KO
12	-5 000	3 000	8 000	0.912	Interno	0.86	2.89	OK
13	-15 000	5 000	12 000	1.260	Externo	11.5	97.9	KO
14	50 000	4 000	10 000	0.847	Interno	2.22	2.15	OK
15	25 000	-6 000	-18 000	0.813	Interno	2.19	2.09	OK

Os dois métodos são totalmente consistentes. Cada carga **Externa** é confirmada em falha por pelo menos um material (betão, aço ou ambos); cada carga **Interna** satisfaz todos os limites de extensão. O fator  $\eta$  é indicador fiável: cargas profundamente no interior têm extensões abaixo dos limites; próximas da fronteira aproximam-se; bem fora excedem-nos. Cargas 10-11: esmagamento do betão, aço no limite. Cargas 6-8 e 13: ambos os limites excedidos.

*Nota: Como explicado no Artigo #2, o solver Newton-Raphson extrapola as leis dos materiais para além do seu domínio de validade física quando o equilíbrio não é atingido dentro do intervalo válido. As extensões reportadas para cargas Externas são artefactos numéricos sem significado físico: confirmam apenas que não existe estado de equilíbrio válido dentro dos limites dos materiais.*

### Benchmark de 100 000 cargas

Ambos os métodos são aplicados a 100 000 combinações aleatórias ( $N \in [-20\ 000, 80\ 000]$  kN,  $M_z, M_y \in [-50\ 000, 50\ 000]$  kN · m, ELU-F). A superfície é construída uma vez (31 ms) e reutilizada para todas as consultas.

Método	Cargas	Tempo de consulta	Taxa	Interno	Externo
Distâncias (consultas)	100 000	13 ms	7.5 M/s	5.1%	94.9%
Tensão-deformação NR	100 000	207 ms	0.48 M/s	5.1%	94.9%

Concordância: **99,97%** (99 974 de 100 000 cargas classificadas identicamente). Os 26 desacordos têm  $|\eta - 1| < 0.002$ : pontos a menos de 0,2% da fronteira, efectivamente **no limite** por qualquer medida.

Este é o comportamento esperado. O módulo de distâncias não aplica um teste de igualdade estrito  $\eta = 1$ : qualquer carga com  $\eta$  suficientemente próximo de 1 é tratada como caso de fronteira. Nesta estreita região, os dois métodos podem legitimamente discordar; o resultado das distâncias depende da resolução da malha, enquanto o solver NR itera para o equilíbrio exacto. Nestes casos, o solver NR é o árbitro final: o seu resultado prevalece sobre a classificação das distâncias.

Do ponto de vista da engenharia, sempre que  $\eta \approx 1$ , o engenheiro não deve confiar na classificação automática. A resposta adequada é executar um cálculo NR completo ou, melhor, modificar a geometria ou armadura para obter margem clara ( $\eta$  abaixo de 1).

O módulo de distâncias é **15 vezes mais rápido** que o solver NR para este lote (fase de consulta). Na prática, ambos os métodos são efectivamente instantâneos para a maioria dos casos de engenharia. A vantagem torna-se relevante em aplicações avançadas (ciclos de optimização estrutural, estudos paramétricos, verificação automática sobre grandes envelopes de carga) onde milhões de combinações ou mais devem ser avaliadas repetidamente.

## Conclusão

O módulo de distâncias fornece um método rápido e fiável para triagem de combinações de carga face à superfície de interação. Para cada carga, devolve um fator  $\eta$  e um estado Interno/Externo, dando ao engenheiro visão imediata das combinações críticas em todos os estados limite.

A validação cruzada em 100 000 cargas confirma 99,97% de concordância com o solver NR. Os 26 desacordos estão a menos de 0,2% da fronteira, onde a discretização da malha torna a classificação incerta; o solver NR é o árbitro final. Para cargas claramente dentro ou fora, os dois métodos são totalmente consistentes.

Ambos os métodos são instantâneos para trabalho de engenharia corrente. As distâncias tornam-se especialmente valiosas quando milhões de combinações devem ser avaliadas (ciclos de optimização, estudos paramétricos, verificação automática), eliminando o cálculo redundante.

Para além dos resultados numéricos, a principal vantagem é o gráfico de dispersão 3D: todas as combinações, todos os estados limite e o domínio de resistência visíveis numa única figura. Num relance, o engenheiro vê quais cargas são seguras e quais excedem a capacidade — gráfico que se integra directamente num relatório de cálculo.

# Exportação

O SectionPro exporta os resultados em três formatos. O relatório PDF inclui vistas 3D da superfície com os pontos de carga. Para cada estado limite, a carga mais crítica é identificada, seguida de tabela ordenada por  $\eta$  decrescente. As exportações Excel e texto fornecem os mesmos dados tabulares.

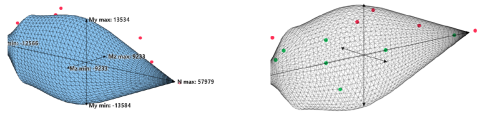
## Resistance check based on distance of loads to the N-Mz-My surface

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-03-19 06:40

Rays are launched towards the loads from (N,0,0). SF represents the distance of the point relative to the boundary delimited by the surface. SF>1 indicates non-verification of the section

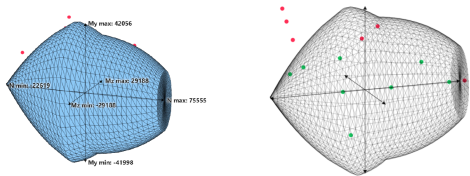
### SLS : Serviceability limit state

7 loads are internal to the N-Mz-My surface. Scattered in green  
8 loads are external to the N-Mz-My surface. Scattered in red  
0 loads are on the boundary of the N-Mz-My surface. Scattered in blue



### ULS : Ultimate limit state

8 loads are internal to the N-Mz-My surface. Scattered in green  
7 loads are external to the N-Mz-My surface. Scattered in red  
0 loads are on the boundary of the N-Mz-My surface. Scattered in blue



### Distances of loads to surface

Load case 23 is the most unfavorable (Fs = 1.68817, External)

Load	Limit state	N (kN)	Mz (kN-m)	My (kN-m)	SF	Status
23	SLS	0.0	10000.0	15000.0	1.688	External
8	ULS	0.0	32000.0	45000.0	1.646	External
26	SLS	35000.0	7500.0	11000.0	1.487	External

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

7	ULS	0.0	27000.0	39000.0	1.475	External
22	SLS	0.0	8500.0	12500.0	1.469	External
11	ULS	45000.0	22000.0	33000.0	1.350	External
13	ULS	-20000.0	15000.0	20000.0	1.331	External
28	SLS	-11000.0	5000.0	7500.0	1.310	External
6	ULS	0.0	20000.0	30000.0	1.229	External
21	SLS	0.0	6500.0	9500.0	1.184	External
29	SLS	45000.0	3000.0	4500.0	1.095	External
10	ULS	35000.0	18000.0	28000.0	1.081	External
25	SLS	28000.0	6000.0	9000.0	1.079	External
19	SLS	60000.0	0.0	0.0	1.068	External
4	ULS	78000.0	0.0	0.0	1.067	External
15	ULS	10000.0	-15000.0	-25000.0	0.967	Internal
12	ULS	-8000.0	8000.0	12000.0	0.964	Internal
27	SLS	-4000.0	2500.0	3500.0	0.942	Internal
30	SLS	8000.0	-5000.0	-8000.0	0.920	Internal
20	SLS	0.0	4000.0	5000.0	0.899	Internal
5	ULS	0.0	10000.0	15000.0	0.898	Internal
18	SLS	53000.0	0.0	0.0	0.868	Internal
3	ULS	70000.0	0.0	0.0	0.847	Internal
14	ULS	60000.0	8000.0	12000.0	0.710	Internal
9	ULS	20000.0	12000.0	18000.0	0.682	Internal
24	SLS	15000.0	4000.0	6000.0	0.652	Internal
1	ULS	15000.0	0.0	0.0	0.397	Internal
16	SLS	10000.0	0.0	0.0	0.369	Internal
17	SLS	30000.0	0.0	0.0	0.216	Internal
2	ULS	40000.0	0.0	0.0	0.022	Internal

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

Figura 11: Exportação PDF, pág. 1: vistas 3D e dispersão de cargas.

Figura 12: Exportação PDF, pág. 2: tabela de resultados.