



Verificação de Resistência com Superfícies de Interação

Tutorial SectionPro: verificação em lote contra o domínio de resistência 3D

BridgeKernel · 2026

Introdução

No artigo anterior, calculamos a superfície de interação, o domínio de resistência 3D de uma seção de concreto armado no espaço (N, M_z, M_y) . O solver tensão-deformação (Artigo #2) verifica cargas individuais, mas o engenheiro deve inspecionar os resultados um a um, ou apenas o caso mais desfavorável, sem visão global de todas as combinações em relação à capacidade.

O módulo de distâncias resolve isso projetando cada ponto de carga na superfície de interação e exibindo o resultado num gráfico de dispersão 3D. Para cada carga, retorna um status (interno, externo ou limite) e um fator η que quantifica a margem. Uma olhada revela quais são seguras, quais excedem a capacidade e por quanto.

Uma vantagem adicional diz respeito a normas com blocos retangulares equivalentes (bloco Whitney ACI 318, CSA A23.3, AASHTO). O solver tensão-deformação deve usar a lei realista (parábola-retângulo), pois um bloco de tensão não conduz um solver iterativo. A superfície de interação, porém, é construída diretamente pelo bloco Whitney, tornando as distâncias mais fiéis à lei de projeto dessas normas.

A contrapartida: o módulo de distâncias não retorna o estado de deformação nem a distribuição de tensões. Responde “passa ou falha, e por quanto?” mas não “qual é a tensão em cada fibra?”.

Resultados calculados

O SectionPro fornece três categorias de resultados por distâncias:

Status e fator de segurança

η : distância normalizada
Status: **Interno** **Externo**
Carga mais desfavorável identificada
Uma superfície por estado limite

Visualização 3D

Superfície de interação (malha triang.)
Pontos de carga no gráfico
Coloridos por status
Rotação, zoom, pan

Exportações

PDF: vistas 3D + tabela de resultados
XLS: cargas, distâncias, status
TXT: resultados tabulares (colunas)

Esta abordagem vs. análise tensão-deformação

A tabela abaixo resume as principais diferenças entre os dois métodos de verificação no SectionPro.

Critério	Distâncias (este artigo)	Tensão-deformação (Artigo #2)
Objetivo	Triagem passa/falha	Estado detalhado
Saída	η + status	σ , ε , FS, forças
Estado de deformação	Não	Sim
Saída visual	Dispersão 3D	Diagramas tensão/deformação
Melhor para	Grandes envelopes de carga	Casos críticos
Bloco Whitney	Recomendado	Usar lei realista
Poucas cargas	Custo da superfície	Rápido (solução direta)
Muitas cargas	Rápido (superfície reutilizada)	Lento (iterativo por carga)

As duas abordagens são complementares. Um fluxo típico: (1) usar distâncias para triagem de todo o envelope e identificar as combinações críticas; (2) usar o solver tensão-deformação nesses casos para obter a resposta completa da seção.

Como as distâncias funcionam

Dado um ponto de carga $P = (N, M_x, M_y)$ e a superfície de interação \mathcal{S} , o módulo calcula o centroide O da malha da superfície (garantido dentro do domínio) e traça um raio de O passando por P até intersectar \mathcal{S} no ponto Q . O fator de segurança é definido como:

$$\eta = \frac{\|\overrightarrow{OP}\|}{\|\overrightarrow{OQ}\|}$$

A interpretação é direta:

- $\eta < 1$: o ponto de carga está **dentro** da superfície; a seção tem capacidade de reserva.
- $\eta = 1$: o ponto de carga está **no limite** a seção está em seu limite exato.
- $\eta > 1$: o ponto de carga está **fora** da superfície; a capacidade é excedida.

No gráfico 3D, pontos de carga são coloridos: **verde** para cargas internas ($\eta < 1$) e **vermelho** para cargas externas ($\eta > 1$).

A superfície é calculada uma vez por estado limite; cada ponto de carga requer apenas uma interseção raio-superfície, com custo desprezível comparado à convergência iterativa do solver tensão-deformação.

Seção octogonal (Eurocode 2)

Dados de entrada

A geometria da seção, armadura e leis de materiais são idênticas às do Artigo #4 (Superfície de Interação). São definidas 30 combinações de carga: 15 em ELU-F (Fundamental) e 15 em ELS-C (Característico), cobrindo força axial pura, flexão biaxial pura, carregamento combinado, tração e compressão.

Concreto

- Seção transversal octogonal
- $b_1 = 2.00$ m, $b_2 = 0.50$ m
- $h_1 = 1.00$ m, $h_2 = 0.60$ m

Armadura

- 48 barras, espaçamento uniforme 150 mm
- Diâmetro $\varphi = 32$ mm, cobrimento 50 mm

Leis de materiais (EC2)

- Concreto C30/37: $f_{ck} = 30$ MPa
- Aço B500B: $f_{yk} = 500$ MPa

The screenshot shows a software interface for defining an octagonal solid section. The 'Data' tab is active, showing 'Octagonal solid section' settings. Under 'Concrete', width b_1 is 2, width b_2 is 0.5, height h_1 is 1, and height h_2 is 0.6. Under 'Reinforcement', mode is 'uniform spacing', bar spacing is 150, bar diameter is 32, concrete cover is 50, and layers are 1. A 3D visualization of the octagonal section with reinforcement bars is shown at the bottom.

Figura 1: Seção octogonal: geometria e disposição da armadura.

ELU-F (Fundamental)

15 combinações de carga: 8 internas, 7 externas.

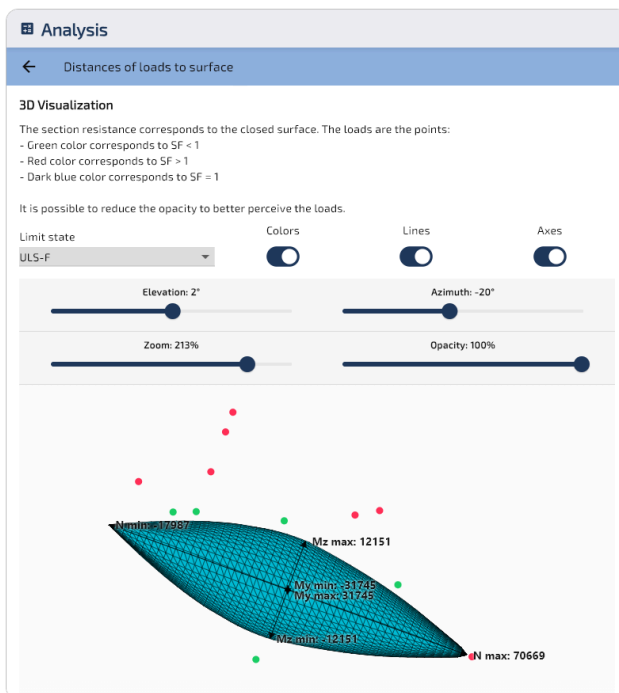


Figura 2: ELU-F: cargas dispersas na superfície (vista 1).

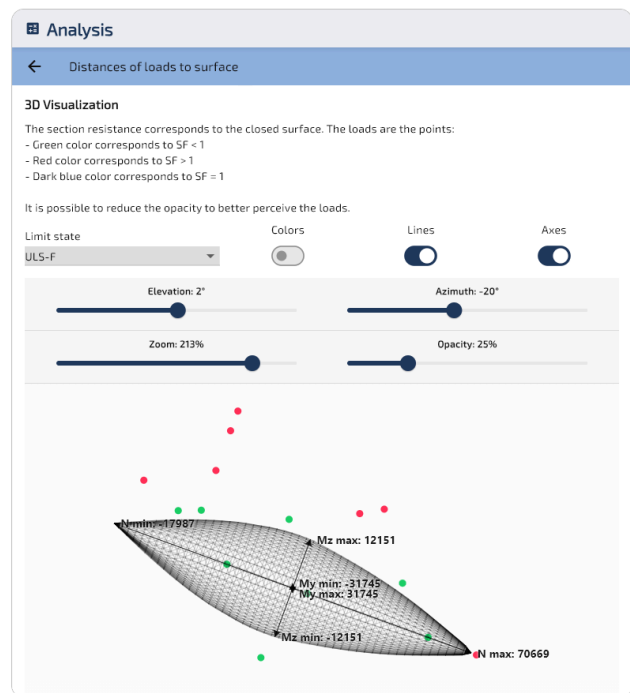


Figura 3: ELU-F: cargas dispersas na superfície (vista 2).

Carga	N (kN)	M_z (kN·m)	M_y (kN·m)	η (-)	Resultado
8	0	14 000	35 000	1.879	Externo
7	0	11 000	30 000	1.605	Externo
4	72 000	0	0	1.030	Externo
5	0	5 000	10 000	0.916	Interno
3	60 000	0	0	0.761	Interno
2	30 000	0	0	0.088	Interno

A carga #4 ($N = 72000$ kN, compressão pura) excede ligeiramente a superfície ($r_{\text{norm}} = 1.030$), confirmando que $N_{\text{max}} = 70669$ kN do Artigo #4 está correto. A carga #2 ($N = 30000$ kN) está bem dentro do domínio ($r_{\text{norm}} = 0.088$), como esperado para uma carga bem abaixo de N_{max} .

As cargas combinadas mostram a forma não cúbica da superfície: a carga #8 ($M_z = 14000$, $M_y = 35000$) tem componentes abaixo dos limites ($M_{z,\text{max}} = 12154$, $M_{y,\text{max}} = 32317$), mas sua combinação coloca o ponto fora da superfície ($r_{\text{norm}} = 1.879$).

ELS-C (Característico)

15 combinações de carga: 6 internas, 9 externas.

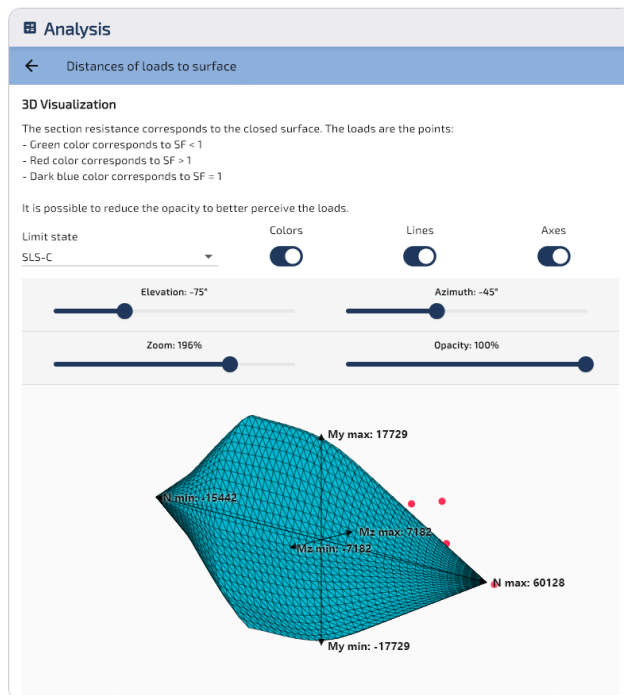


Figura 4: ELS-C: cargas dispersas na superfície (vista 1).

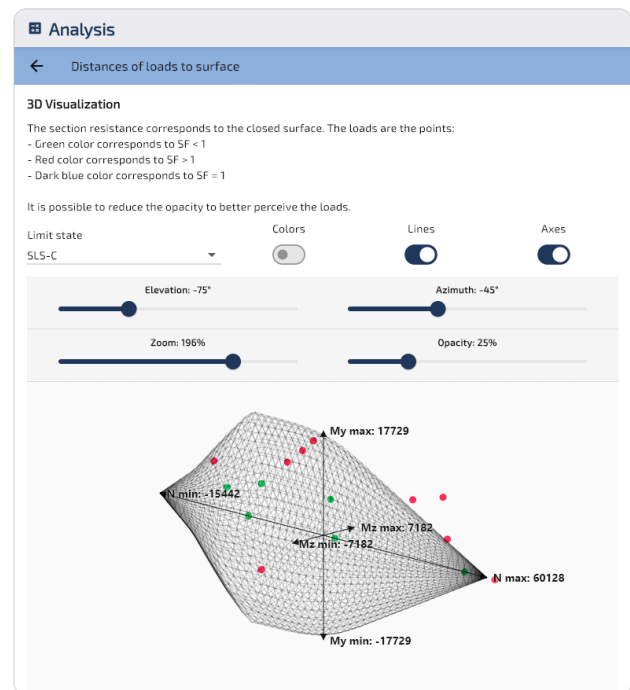


Figura 5: ELS-C: cargas dispersas na superfície (vista 2).

Carga	N (kN)	M_z (kN·m)	M_y (kN·m)	η (-)	Resultado
23	0	8 000	20 000	1.910	Externo
26	35 000	6 000	15 000	1.795	Externo
19	62 000	0	0	1.050	Externo
27	-5 000	2 000	5 000	0.990	Interno
18	55 000	0	0	0.866	Interno
17	25 000	0	0	0.081	Interno

Obs.: Para identificar melhor pontos de carga internos ocultos atrás da superfície, reduza a opacidade da superfície ou mude para o modo wireframe (ambas as opções estão disponíveis no visualizador 3D).

Seção elíptica (ACI 318)

Dados de entrada

A geometria da seção, armadura e leis de materiais são idênticas às do Artigo #4. São definidas 30 combinações de carga: 15 em ELU e 15 em ELS.

Concreto

- Seção transversal elíptica
- Largura = 3.00 m, Altura = 2.00 m

Armadura

- 40 barras ao longo do perímetro
- Diâmetro $\varphi = 40$ mm, cobrimento 50 mm

Leis de materiais (ACI 318)

- Concreto: $f'_c = 30$ MPa
- Aço: $f_y = 500$ MPa

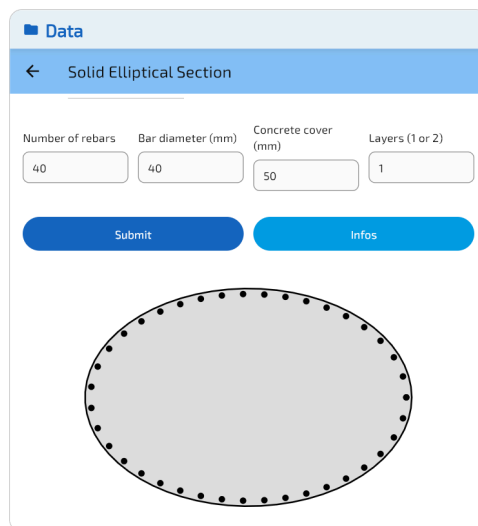


Figura 6: Seção elíptica: geometria e armadura.

ELU

15 combinações de carga: 8 internas, 7 externas.

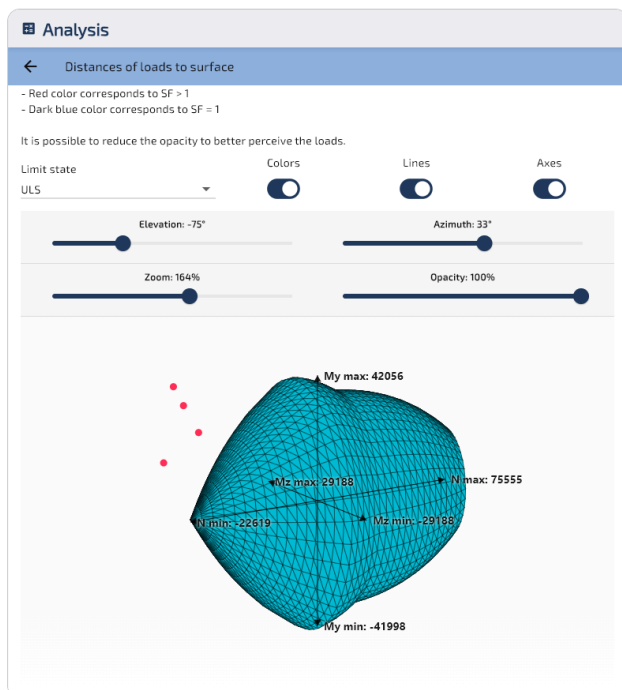


Figura 7: ELU: cargas dispersas na superfície (vista 1).

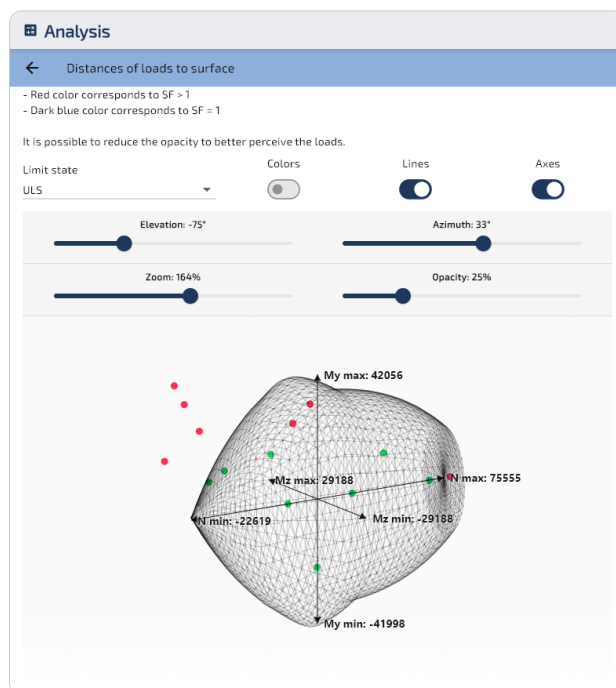


Figura 8: ELU: cargas dispersas na superfície (vista 2).

Carga	N (kN)	M_z (kN·m)	M_y (kN·m)	η (-)	Resultado
8	0	32 000	45 000	1.646	Externo
7	0	27 000	39 000	1.475	Externo
4	78 000	0	0	1.067	Externo
15	10 000	-15 000	-25 000	0.967	Interno
3	70 000	0	0	0.847	Interno
2	40 000	0	0	0.022	Interno

Os fatores φ da ACI ($\varphi = 0.65$ a 0.90) e o limite $\varphi_N = 0.80$ reduzem a capacidade nominal, tornando a superfície ELU menor que uma superfície bruta. Do Artigo #4, a caixa delimitadora dá $N_{\max} = 75555$ kN, $M_{z,\max} = 29188$ kN·m, $M_{y,\max} = 42056$ kN·m: exceder qualquer desses limites garante falha, como visto nas cargas #4 e #8. A carga #7 ($M_z = 27000$, $M_y = 39000$ kN·m), porém, fica dentro dos três limites mas ainda cai fora da superfície ($\eta = 1.475$); a caixa delimitadora não detecta esse caso, a superfície 3D sim.

ELS

15 combinações de carga: 7 internas, 8 externas.

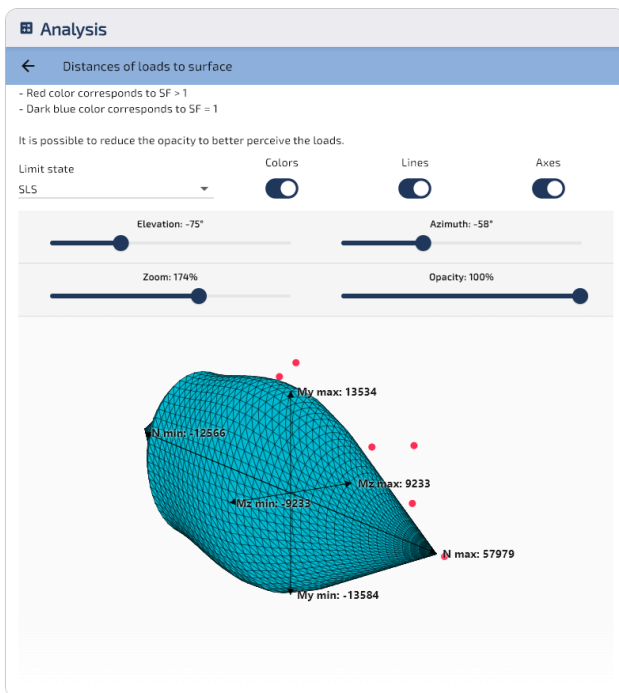


Figura 9: ELS: cargas dispersas na superfície (vista 1).

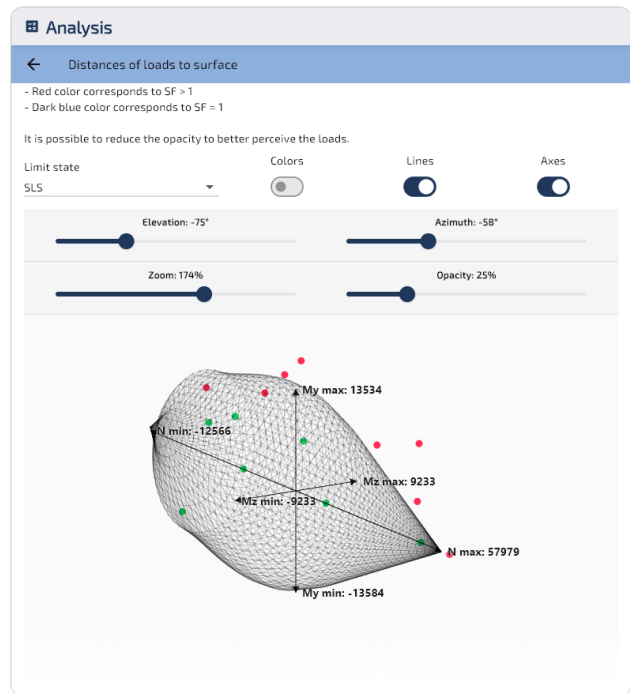


Figura 10: ELS: cargas dispersas na superfície (vista 2).

Carga	N (kN)	M_z (kN·m)	M_y (kN·m)	η (-)	Resultado
23	0	10 000	15 000	1.688	Externo
26	35 000	7 500	11 000	1.487	Externo
19	60 000	0	0	1.068	Externo
27	-4 000	2 500	3 500	0.942	Interno
18	53 000	0	0	0.868	Interno
17	30 000	0	0	0.216	Interno

No ELS, o concreto é limitado à tensão admissível ($\sigma_c = 11.5$ MPa), resultando em superfície menor que no ELU. A carga #23 é a mais desfavorável em ambos os estados limite ($r_{norm} = 1.688$): a flexão biaxial combinada ($M_z = 10000$, $M_y = 15000$ kN · m) excede largamente a capacidade ELS, mesmo que cada componente individualmente ficasse dentro da caixa delimitadora.

Validação cruzada com o solver tensão-def.

O módulo de distâncias projeta pontos de carga numa malha pré-construída da superfície de interação. O solver NR (Newton-Raphson, Artigo #2) itera para cada carga individualmente. Os dois métodos devem concordar: uma carga com $\eta < 1$ deve satisfazer todos os limites de deformação; uma com $\eta > 1$ deve violar pelo menos um.

Comparação com 15 cargas (seção octogonal, ELU-F)

Para cada carga, a tabela fornece o resultado por distâncias (η e status Interno/Externo), seguido da saída do solver tensão-deformação: deformação máxima do concreto ε_c e do aço ε_s (ambas em ‰, valores absolutos), e o resultado do material.

Carga	N (kN)	M_z (kN·m)	M_y (kN·m)	η (-)	Status	ε_c (‰)	ε_s (‰)	Resultado
1	10 000	0	0	0.390	Interno	0.17	0.17	OK
2	30 000	0	0	0.072	Interno	0.54	0.54	OK
3	60 000	0	0	0.757	Interno	1.36	1.36	OK
4	72 000	0	0	1.031	Externo	2.17	2.17	KO
5	0	5 000	10 000	0.920	Interno	1.50	3.13	OK
6	0	8 000	20 000	1.224	Externo	18.0	73.6	KO
7	0	11 000	30 000	1.584	Externo	26.2	112	KO
8	0	14 000	35 000	1.864	Externo	33.3	140	KO
9	20 000	5 000	15 000	0.691	Interno	1.66	1.58	OK
10	35 000	8 000	22 000	1.108	Externo	4.65	4.43	KO
11	40 000	10 000	25 000	1.365	Externo	6.93	6.59	KO
12	-5 000	3 000	8 000	0.912	Interno	0.86	2.89	OK
13	-15 000	5 000	12 000	1.260	Externo	11.5	97.9	KO
14	50 000	4 000	10 000	0.847	Interno	2.22	2.15	OK
15	25 000	-6 000	-18 000	0.813	Interno	2.19	2.09	OK

Os dois métodos são plenamente consistentes. Toda carga **Externa** é confirmada em falha por pelo menos um material (concreto, aço ou ambos), e toda carga **Interna** satisfaz todos os limites de deformação. O fator de segurança é indicador confiável da margem: cargas bem dentro mostram deformações abaixo dos limites; próximas ao limite os aproximam; bem fora os excedem por larga margem. Cargas 10-11: esmagamento do concreto, aço dentro do limite. Cargas 6-8 e 13: ambos os limites excedidos.

Nota: Como explicado no Artigo #2, o solver NR extrapola as leis de materiais além da validade física quando o equilíbrio não pode ser atingido. As deformações para cargas Externas são artefatos numéricos: confirmam apenas que não existe estado de equilíbrio válido dentro dos limites dos materiais.

Benchmark com 100 000 cargas

Ambos os métodos são aplicados a 100 000 combinações aleatórias ($N \in [-20\ 000, 80\ 000]$ kN, $M_z, M_y \in [-50\ 000, 50\ 000]$ kN · m, ELU-F). A superfície é construída uma vez (31 ms) e reutilizada para todas as consultas.

Método	Cargas	Tempo de consulta	Taxa	Interno	Externo
Distâncias (consultas)	100 000	13 ms	7.5 M/s	5.1%	94.9%
Tensão-deformação NR	100 000	207 ms	0.48 M/s	5.1%	94.9%

Concordância: **99,97%** (99 974 de 100 000 cargas classificadas identicamente). As 26 discordâncias têm $|\eta - 1| < 0.002$: estão dentro de 0,2% do limite da superfície, sendo efetivamente **no limite** por qualquer critério.

Este é o comportamento esperado. O módulo de distâncias não aplica um teste de igualdade estrita $\eta = 1$: qualquer carga com η próximo de 1 é tratada como caso de fronteira. Nessa faixa estreita, os dois métodos podem discordar; o resultado por distâncias depende da resolução da malha (triângulos finitos introduzem aproximação geométrica), enquanto o solver NR itera para o equilíbrio exato. Nesses casos, o solver NR é o árbitro final.

Do ponto de vista da engenharia, sempre que $\eta \approx 1$, o engenheiro não deve depender da classificação automática Interno/Externo. A resposta adequada é executar um cálculo NR completo ou, melhor, modificar a geometria ou a armadura para obter margem de segurança clara (η abaixo de 1).

O módulo de distâncias é **15 vezes mais rápido** que o solver NR (fase de consulta). Na prática, ambos são instantâneos para a grande maioria dos casos de engenharia. A vantagem torna-se relevante para otimização estrutural, estudos paramétricos e verificação automática em larga escala.

Conclusão

O módulo de distâncias fornece um método rápido e confiável para triagem de combinações de carga contra a superfície de interação de uma seção de concreto armado. Para cada carga, retorna um fator de segurança η e um status Interno/Externo, dando ao engenheiro uma visão imediata das combinações críticas em todos os estados limite.

A validação cruzada com 100 000 cargas confirma 99,97% de concordância com o solver NR. As 26 discordâncias estão dentro de 0,2% do limite da superfície, onde a discretização da malha torna a classificação incerta; nesses casos, o solver NR é o árbitro final. Para cargas claramente dentro ou fora da superfície, os dois métodos são consistentes.

Ambos os métodos são instantâneos para engenharia de rotina. A abordagem por distâncias torna-se especialmente valiosa quando milhões de combinações devem ser avaliadas, pois sua arquitetura de reutilização da superfície elimina cálculos redundantes.

Além dos resultados numéricos, a principal vantagem é o gráfico de dispersão 3D: todas as combinações, todos os estados limite e o domínio de resistência visíveis em uma única figura. De relance, o engenheiro vê quais cargas são seguras, quais excedem a capacidade e por quanto, um gráfico que se integra ao relatório de cálculo.

Exportação

O SectionPro exporta os resultados em três formatos. O relatório PDF inclui vistas 3D da superfície com os pontos de carga. Para cada estado limite, a carga mais crítica é identificada, seguida de tabela ordenada por η decrescente. As exportações Excel e texto fornecem os mesmos dados tabulares.

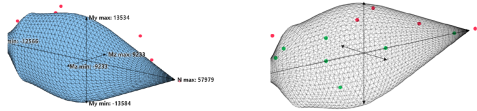
Resistance check based on distance of loads to the N-Mz-My surface

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-03-19 06:40

Rays are launched towards the loads from (N,0,0). SF represents the distance of the point relative to the boundary delimited by the surface. SF>1 indicates non-verification of the section

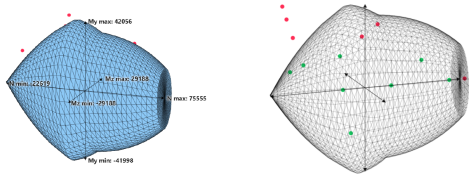
SLS : Serviceability limit state

7 loads are internal to the N-Mz-My surface. Scattered in green
8 loads are external to the N-Mz-My surface. Scattered in red
0 loads are on the boundary of the N-Mz-My surface. Scattered in blue



ULS : Ultimate limit state

8 loads are internal to the N-Mz-My surface. Scattered in green
7 loads are external to the N-Mz-My surface. Scattered in red
0 loads are on the boundary of the N-Mz-My surface. Scattered in blue



Distances of loads to surface

Load case 23 is the most unfavorable (Fs = 1.68817, External)

Load	Limit state	N (kN)	Mz (kN-m)	My (kN-m)	SF	Status
23	SLS	0.0	10000.0	15000.0	1.688	External
8	ULS	0.0	32000.0	45000.0	1.646	External
26	SLS	35000.0	7500.0	11000.0	1.487	External

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

7	ULS	0.0	27000.0	39000.0	1.475	External
22	SLS	0.0	8500.0	12500.0	1.469	External
11	ULS	45000.0	22000.0	33000.0	1.350	External
13	ULS	-20000.0	15000.0	20000.0	1.331	External
28	SLS	-11000.0	5000.0	7500.0	1.310	External
6	ULS	0.0	20000.0	30000.0	1.229	External
21	SLS	0.0	6500.0	9500.0	1.184	External
29	SLS	45000.0	3000.0	4500.0	1.095	External
10	ULS	35000.0	18000.0	28000.0	1.081	External
25	SLS	28000.0	6000.0	9000.0	1.079	External
19	SLS	60000.0	0.0	0.0	1.068	External
4	ULS	78000.0	0.0	0.0	1.067	External
15	ULS	10000.0	-15000.0	-25000.0	0.967	Internal
12	ULS	-8000.0	8000.0	12000.0	0.964	Internal
27	SLS	-4000.0	2500.0	3500.0	0.942	Internal
30	SLS	8000.0	-5000.0	-8000.0	0.920	Internal
20	SLS	0.0	4000.0	5000.0	0.899	Internal
5	ULS	0.0	10000.0	15000.0	0.898	Internal
18	SLS	53000.0	0.0	0.0	0.868	Internal
3	ULS	70000.0	0.0	0.0	0.847	Internal
14	ULS	60000.0	8000.0	12000.0	0.710	Internal
9	ULS	20000.0	12000.0	18000.0	0.682	Internal
24	SLS	15000.0	4000.0	6000.0	0.652	Internal
1	ULS	15000.0	0.0	0.0	0.397	Internal
16	SLS	10000.0	0.0	0.0	0.369	Internal
17	SLS	30000.0	0.0	0.0	0.216	Internal
2	ULS	40000.0	0.0	0.0	0.022	Internal

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

Figura 11: Exportação PDF, página 1: vistas 3D e dispersão de cargas.

Figura 12: Exportação PDF, página 2: tabela de resultados.