



Sprawdzenie nośności na podstawie powierzchni interakcji

SectionPro Tutorial: grupowe sprawdzanie przypadków obciążeń na tle przestrzennego obszaru nośności

BridgeKernel · 2026

Wprowadzenie

W poprzednim artykule obliczono powierzchnię interakcji — przestrzenny obszar nośności przekroju żelbetowego w (N, M_z, M_y) . Solver naprężeniowo-odkształceniowy (Article #2) może sprawdzać pojedyncze obciążenia, jednak inżynier musi analizować wyniki jeden po drugim lub ograniczać się do przypadku najbardziej niekorzystnego, bez obrazu wszystkich kombinacji względem nośności.

Moduł odległości rozwiązuje to, rzutując każdy punkt obciążenia na powierzchnię interakcji i wyświetlając wynik jako wykres rozrzutu 3D. Dla każdego obciążenia zwraca status (wewnątrz, na zewnątrz lub na granicy) oraz współczynnik η określający zapas nośności. Jednym spojrzeniem inżynier identyfikuje obciążenia bezpieczne, przekraczające nośność i o ile.

Dodatkową zaletą jest obsługa norm z zastępczym prostokątnym blokiem naprężeń (ACI 318 blok Whitneya, CSA A23.3, AASHTO). Solver naprężeniowo-odkształceniowy musi stosować prawo paraboliczno-prostokątne, gdyż blok naprężeń nie może napędzać iteracyjnego solvera odkształceniowego. Powierzchnia interakcji jest budowana bezpośrednio z bloku Whitneya, co czyni podejście odległościowe wierniejszym tym normom.

Kompromis: moduł odległości nie zwraca stanu odkształceń ani rozkładu naprężeń. Odpowiada na pytanie „spełnione czy nie, i o ile?”, lecz nie „jakie jest naprężenie w każdym włóknie?”.

Obliczane wyniki

SectionPro raportuje trzy kategorie wyników dla każdej analizy odległości:

Status i wskaźnik wyk.

η : unormowana odległość
Status: **Wewn.** **Zewn.**
Jedna pow. / stan graniczny

Wizualizacja 3D

Siatka pow. interakcji
Punkty obciążeń: wykres rozrzutu
Obrót, zoom, przesuwanie

Eksporty

PDF: widoki 3D + tabela wyn.
XLS: obciążenia, odległości
TXT: wyniki tabelaryczne

Podejście a analiza naprężeniowo-odkształceniowa

Poniższa tabela podsumowuje kluczowe różnice między obiema metodami weryfikacji dostępnymi w SectionPro.

Kryterium	Odległości (ten art.)	Napr.-odksz. (Art. #2)
Cel	Wstępna weryfikacja	Stan szczegółowy
Wynik	η + status	σ , ε , FS, siły
Stan odkształceń	Nie	Tak
Wynik graficzny	Rozrzut 3D	Diagramy napr./odksz.
Zalecane dla	Duże koperty obciążeń	Krytyczne przypadki
Blok Whitneya	Zalecany	Prawo realistyczne
Mało obciążeń	Narzut pow.	Szybko (bezp. rozw.)
Dużo obciążeń	Szybko (jedna pow., tanie promienie)	Wolno (iter./obciążenie)

Obie metody uzupełniają się. Typowy przepływ: (1) odległości do przeglądu całej koperty i identyfikacji kombinacji krytycznych; (2) solver naprężeniowo-odkształceniowy dla tych przypadków, aby uzyskać pełną odpowiedź przekroju.

Zasada działania modułu odległości

Dla punktu obciążenia $P = (N, M_z, M_y)$ i powierzchni interakcji \mathcal{S} moduł oblicza środek ciężkości O siatki powierzchni (gwarantowany wewnątrz obszaru nośności) i śledzi promień z O przez P do przecięcia z \mathcal{S} w punkcie Q . Współczynnik bezpieczeństwa:

$$\eta = \frac{\|\overrightarrow{OP}\|}{\|\overrightarrow{OQ}\|}$$

Interpretacja jest prosta:

- $\eta < 1$: punkt obciążenia **wewnątrz** powierzchni; przekrój ma rezerwę nośności.
- $\eta = 1$: punkt obciążenia **na granicy** przekrój dokładnie na granicy nośności.
- $\eta > 1$: punkt obciążenia **na zewnątrz** powierzchni; nośność jest przekroczona.

Na wykresie rozrzutu 3D punkty obciążeń są kodowane kolorami: **zielony** dla wewnętrznych ($\eta < 1$), **czerwony** dla zewnętrznych ($\eta > 1$).

Powierzchnia jest obliczana raz na stan graniczny; każdy punkt obciążenia wymaga jedynie przecięcia promień-powierzchnia, o zanedbywalnym koszcie w porównaniu do iteracyjnej zbieżności solvera NR.

Przekrój ośmiokątny (Eurocode 2)

Dane wejściowe

Geometria przekroju, zbrojenie i prawa materiałowe są identyczne z Article #4 (Powierzchnia interakcji). Zdefiniowano 30 kombinacji: 15 dla ULS-F (kombinacja podstawowa) i 15 dla SLS-C (charakterystyczna), obejmujących czystą siłę osiową, dwuosiowe zginanie, obciążenia złożone, rozciąganie i ściskanie.

Beton

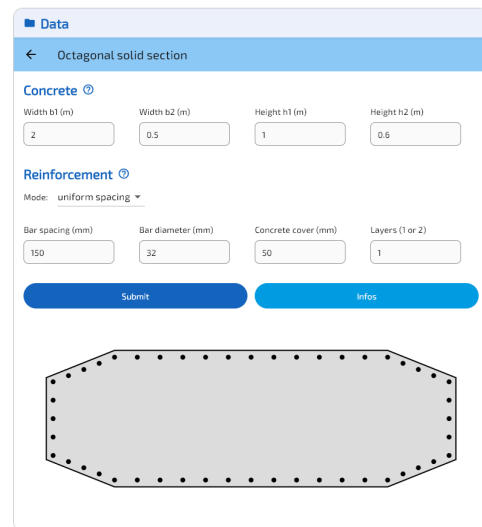
- Przekrój ośmiokątny
- $b_1 = 2.00$ m, $b_2 = 0.50$ m
- $h_1 = 1.00$ m, $h_2 = 0.60$ m

Zbrojenie

- 48 prętów, rozstaw równomierny 150 mm
- Średnica $\varphi = 32$ mm, otulina 50 mm

Prawa materiałowe (EC2)

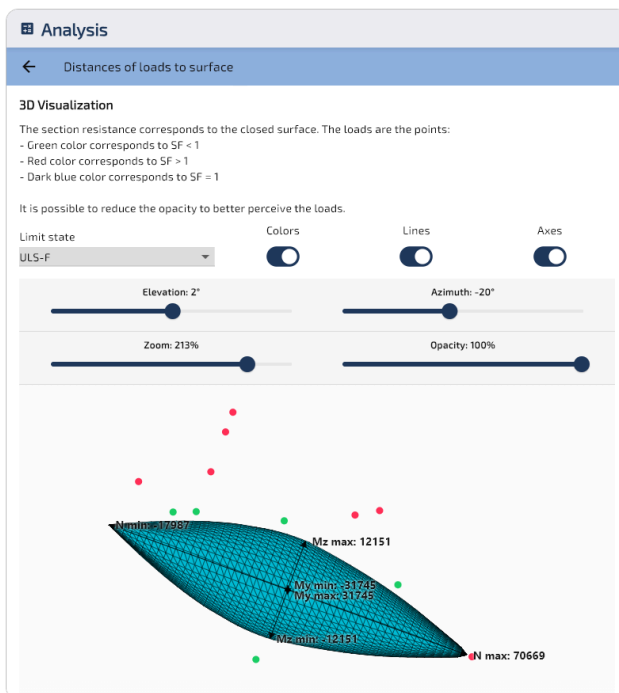
- Beton C30/37: $f_{ck} = 30$ MPa
- Stal B500B: $f_{yk} = 500$ MPa



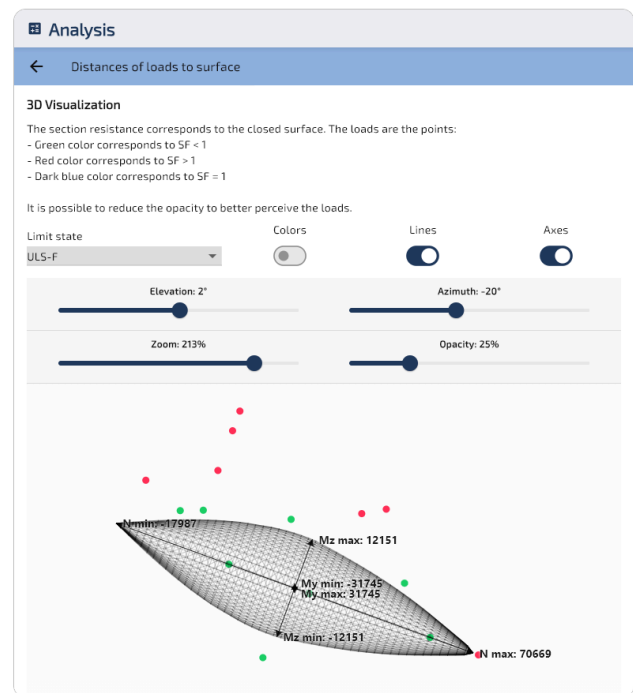
Rysunek 1: Przekrój ośmiokątny: geometria i rozmieszczenie zbrojenia.

ULS-F (kombinacja podstawowa)

15 kombinacji obciążeń: 8 wewnątrz, 7 na zewnątrz.



Rysunek 2: ULS-F: punkty obciążeń na powierzchni (widok 1).



Rysunek 3: ULS-F: punkty obciążeń na powierzchni (widok 2).

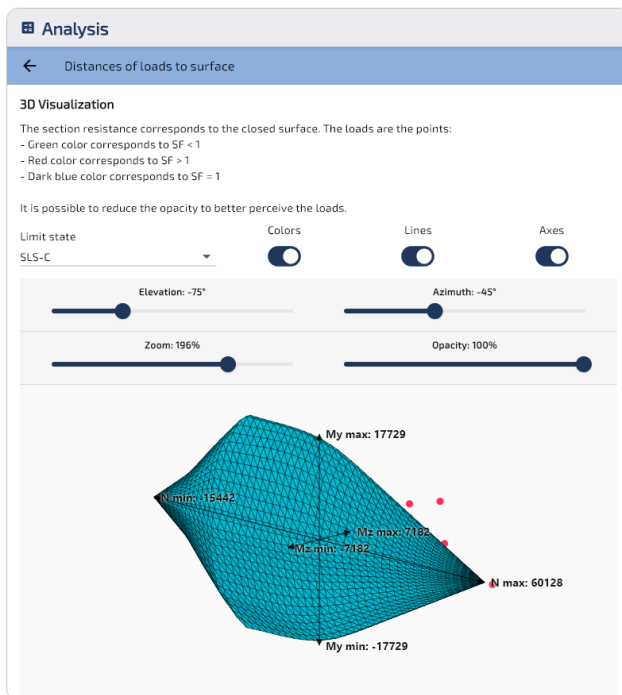
Obciąż.	N (kN)	M_z (kN·m)	M_y (kN·m)	η (-)	Status
8	0	14 000	35 000	1.879	Zewn.
7	0	11 000	30 000	1.605	Zewn.
4	72 000	0	0	1.030	Zewn.
5	0	5 000	10 000	0.916	Wewn.
3	60 000	0	0	0.761	Wewn.
2	30 000	0	0	0.088	Wewn.

Obciążenie #4 ($N = 72000$ kN, czyste ściskanie) nieznacznie przekracza powierzchnię ($r_{\text{norm}} = 1.030$), potwierdzając, że $N_{\text{max}} = 70669$ kN z Article #4 jest prawidłowe. Obciążenie #2 ($N = 30000$ kN) leży głęboko wewnątrz ($r_{\text{norm}} = 0.088$), zgodnie z oczekiwaniami dla obciążenia daleko poniżej N_{max} .

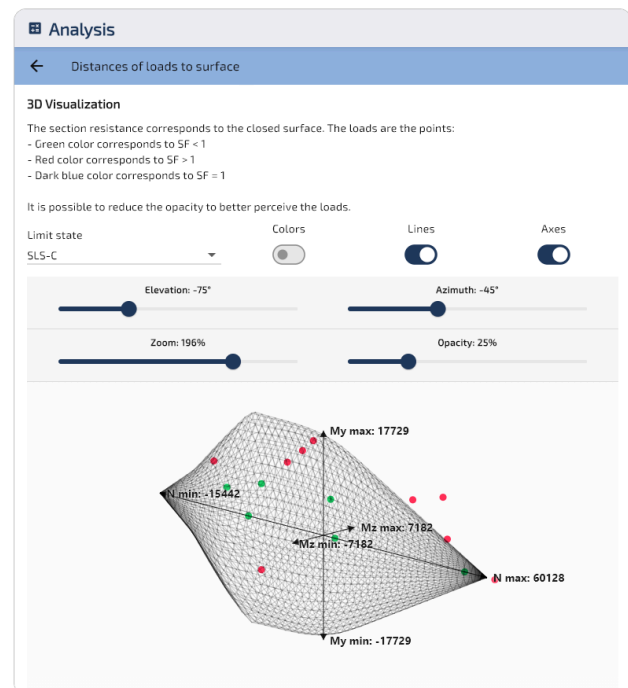
Obciążenia złożone ukazują niesześcienny kształt powierzchni interakcji: obciążenie #8 ($M_z = 14000$, $M_y = 35000$) ma składowe momenty poniżej granic obwiedni ($M_{z,\text{max}} = 12154$, $M_{y,\text{max}} = 32317$), lecz ich kombinacja przesuwa punkt poza powierzchnię ($r_{\text{norm}} = 1.879$).

SLS-C (charakterystyczny)

15 kombinacji obciążeń: 6 wewnątrz, 9 na zewnątrz.



Rysunek 4: SLS-C: punkty obciążeń na powierzchni (widok 1).



Rysunek 5: SLS-C: punkty obciążeń na powierzchni (widok 2).

Obciąż.	N (kN)	M_z (kN·m)	M_y (kN·m)	η (-)	Status
23	0	8 000	20 000	1.910	Zewn.
26	35 000	6 000	15 000	1.795	Zewn.
19	62 000	0	0	1.050	Zewn.
27	-5 000	2 000	5 000	0.990	Wewn.
18	55 000	0	0	0.866	Wewn.
17	25 000	0	0	0.081	Wewn.

Uwaga: Aby lepiej zidentyfikować wewnętrzne punkty obciążeń ukryte za powierzchnią, należy zmniejszyć przezroczystość powierzchni lub przełączyć się na tryb siatki drucianej (obie opcje dostępne w przeglądarce 3D).

Przekrój eliptyczny (ACI 318)

Dane wejściowe

Geometria przekroju, zbrojenie i prawa materiałowe są identyczne z tymi użytymi w Article #4. Zdefiniowano 30 kombinacji obciążeń: 15 dla ULS i 15 dla SLS.

Beton

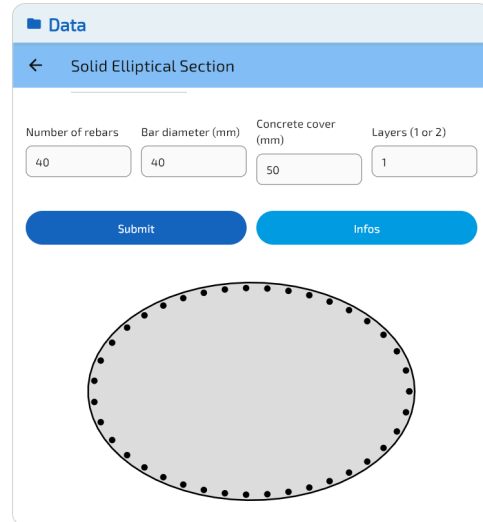
- Przekrój eliptyczny
- Szerokość = 3.00 m, Wysokość = 2.00 m

Zbrojenie

- 40 prętów wzdłuż obwodu
- Średnica $\varphi = 40$ mm, otulina 50 mm

Prawa materiałowe (ACI 318)

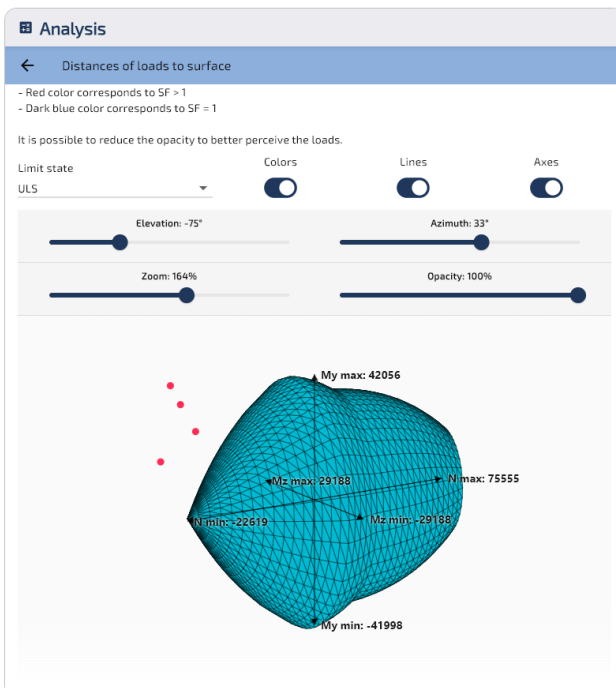
- Beton: $f'_c = 30$ MPa
- Stal: $f_y = 500$ MPa



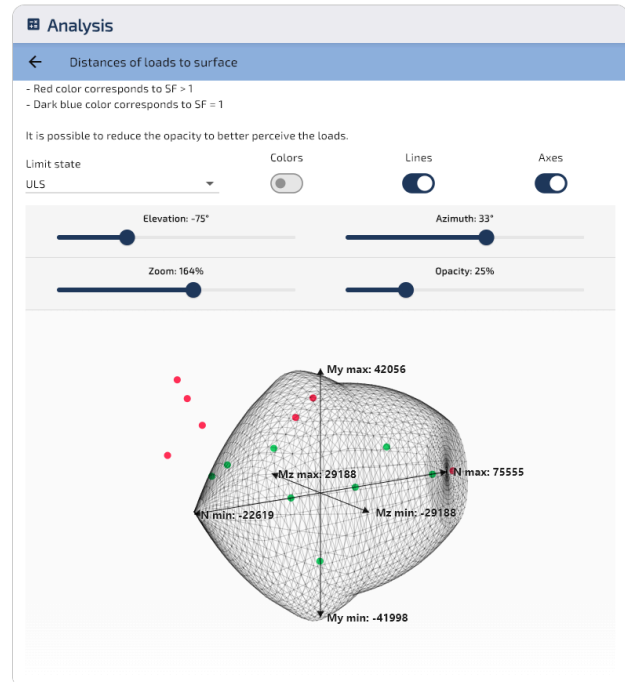
Rysunek 6: Przekrój eliptyczny: geometria i zbrojenie.

ULS

15 kombinacji obciążeń: 8 wewnątrz, 7 na zewnątrz.



Rysunek 7: ULS: punkty obciążeń na powierzchni (widok 1).



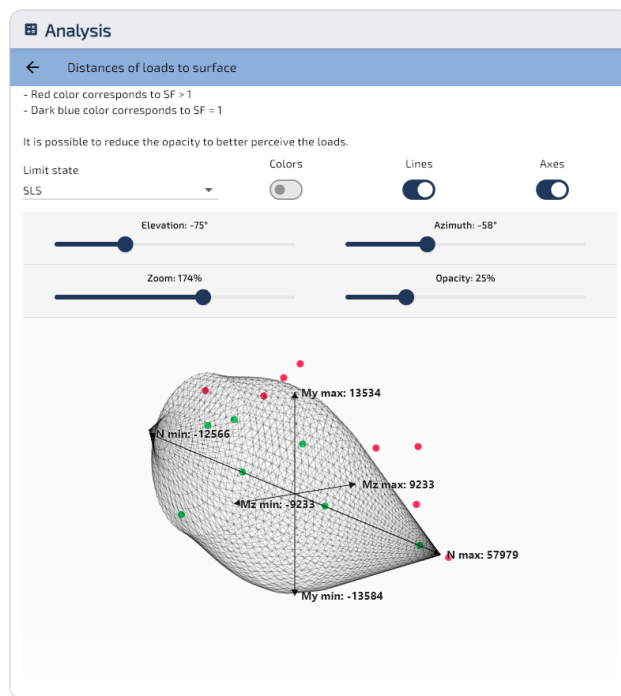
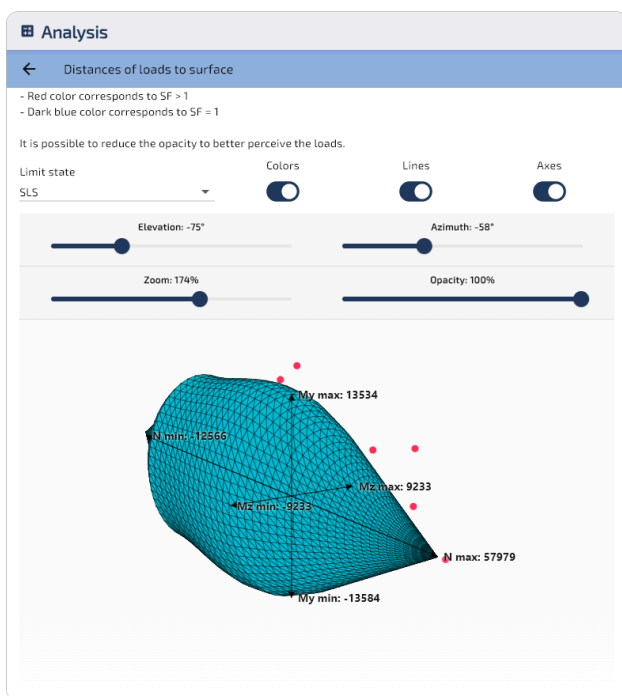
Rysunek 8: ULS: punkty obciążeń na powierzchni (widok 2).

Obciąż.	N (kN)	M_z (kN·m)	M_y (kN·m)	η (-)	Status
8	0	32 000	45 000	1.646	Zewn.
7	0	27 000	39 000	1.475	Zewn.
4	78 000	0	0	1.067	Zewn.
15	10 000	-15 000	-25 000	0.967	Wewn.
3	70 000	0	0	0.847	Wewn.
2	40 000	0	0	0.022	Wewn.

Współczynniki φ wg ACI ($\varphi = 0.65$ do 0.90) i ograniczenie $\varphi_N = 0.80$ zmniejszają nośność; powierzchnia ULS jest mniejsza niż surowa powierzchnia interakcji. Z Article #4 obwiednia daje $N_{\max} = 75555$ kN, $M_{z,\max} = 29188$ kN·m, $M_{y,\max} = 42056$ kN·m: przekroczenie któregośkolwiek limitu gwarantuje niespełnienie nośności (obciążenia #4 i #8). Obciążenie #7 ($M_z = 27000$, $M_y = 39000$ kN·m) mieści się we wszystkich granicach, a mimo to wypada poza powierzchnię ($\eta = 1.475$); obwiednia tego nie wykryje, powierzchnia 3D tak.

SLS

15 kombinacji obciążeń: 7 wewnątrz, 8 na zewnątrz.



Rysunek 9: SLS: punkty obciążeń na powierzchni (widok 1). Rysunek 10: SLS: punkty obciążeń na powierzchni (widok 2).

Obciąż.	N (kN)	M_z (kN·m)	M_y (kN·m)	η (-)	Status
23	0	10 000	15 000	1.688	Zewn.
26	35 000	7 500	11 000	1.487	Zewn.
19	60 000	0	0	1.068	Zewn.
27	-4 000	2 500	3 500	0.942	Wewn.
18	53 000	0	0	0.868	Wewn.
17	30 000	0	0	0.216	Wewn.

W SLS beton jest ograniczony do naprężenia dopuszczalnego ($\sigma_c = 11.5$ MPa), co daje znacznie mniejszą powierzchnię niż w ULS. Obciążenie #23 jest najbardziej niekorzystne w obu stanach granicznych ($r_{\text{norm}} = 1.688$): złożone dwuosiowe zginanie ($M_z = 10000$, $M_y = 15000$ kN·m) znacznie przekracza nośność SLS, mimo że każdy moment indywidualnie mieściłby się w obwiedni.

Wzajemna weryfikacja z solverem naprężeniowo-odkształceniowym

Moduł odległości rzutuje punkty obciążeń na gotową siatkę powierzchni interakcji. Solver NR (Newton-Raphson, Article #2) iteruje dla każdego obciążenia osobno. Obie metody powinny być zgodne: obciążenie wewnątrz ($\eta < 1$) musi spełniać graniczne odkształcenia materiałów, a obciążenie na zewnątrz ($\eta > 1$) musi naruszać co najmniej jedną granicę.

Porównanie dla 15 obciążeń (przekrój ośmiokątny, ULS-F)

Dla każdego obciążenia tabela podaje wynik modułu odległości (η i status Wewn./Zewn.), a następnie wyniki solvera: najniekorzystniejsze odkształcenie betonu ε_c i stali ε_s (oba w ‰, wartości bezwzględne) oraz odpowiedni wynik materiałowy.

Obciąż.	N (kN)	M_z (kN·m)	M_y (kN·m)	η (-)	Status	ε_c (‰)	ε_s (‰)	Wynik
1	10 000	0	0	0.390	Wewn.	0.17	0.17	OK
2	30 000	0	0	0.072	Wewn.	0.54	0.54	OK
3	60 000	0	0	0.757	Wewn.	1.36	1.36	OK
4	72 000	0	0	1.031	Zewn.	2.17	2.17	KO
5	0	5 000	10 000	0.920	Wewn.	1.50	3.13	OK
6	0	8 000	20 000	1.224	Zewn.	18.0	73.6	KO
7	0	11 000	30 000	1.584	Zewn.	26.2	112	KO
8	0	14 000	35 000	1.864	Zewn.	33.3	140	KO
9	20 000	5 000	15 000	0.691	Wewn.	1.66	1.58	OK
10	35 000	8 000	22 000	1.108	Zewn.	4.65	4.43	KO
11	40 000	10 000	25 000	1.365	Zewn.	6.93	6.59	KO
12	-5 000	3 000	8 000	0.912	Wewn.	0.86	2.89	OK
13	-15 000	5 000	12 000	1.260	Zewn.	11.5	97.9	KO
14	50 000	4 000	10 000	0.847	Wewn.	2.22	2.15	OK
15	25 000	-6 000	-18 000	0.813	Wewn.	2.19	2.09	OK

Obie metody są w pełni zgodne. Każde obciążenie **Zewn.** jest potwierdzone przez przekroczenie co najmniej jednego materiału (beton, stal lub oba), a każde **Wewn.** spełnia wszystkie granice odkształceń. Współczynnik η jest wiarygodnym wskaźnikiem zapasu: obciążenia głęboko wewnątrz mają odkształcenia daleko poniżej granic, bliskie granicy zbliżają się do niej, a wyraźnie zewnętrzne znacznie ją przekraczają. Obciążenia 10-11: tylko miażdżenie betonu. Obciążenia 6-8 i 13: obie granice przekroczone jednocześnie.

Uwaga: Jak wyjaśniono w Article #2, solver Newton-Raphson ekstrapoluje prawa materiałowe poza ich fizycznie obowiązujący zakres, gdy równowaga nie może być osiągnięta w granicach ważności. Odkształcenia raportowane dla obciążeń zewnętrznych są numerycznymi artefaktami bez znaczenia fizycznego: potwierdzają jedynie brak prawidłowego stanu równowagi.

Benchmark z 100 000 obciążeń

Obie metody zastosowano do 100 000 losowych kombinacji obciążeń ($N \in [-20\ 000, 80\ 000]$ kN, $M_z, M_y \in [-50\ 000, 50\ 000]$ kN · m, wszystkie dla ULS-F). Powierzchnia jest budowana raz (31 ms) i wielokrotnie używana do wszystkich zapytań.

Metoda	Obciąż.	Czas zapyt.	Wydajność	Wewn.	Zewn.
Odległości (tylko zapytania)	100 000	13 ms	7.5 M/s	5.1%	94.9%
Napężenia-odkształcenia NR	100 000	207 ms	0.48 M/s	5.1%	94.9%

Zgodność: **99,97%** (99 974 z 100 000 obciążeń sklasyfikowanych identycznie). 26 rozbieżności ma $|\eta - 1| < 0.002$: punkty leżą w odległości 0,2% od granicy powierzchni i są praktycznie **na granicy** według każdego kryterium.

Jest to zachowanie oczekiwane. Moduł odległości nie stosuje ścisłego testu $\eta = 1$: obciążenia wystarczająco bliskie 1 są traktowane jako przypadek graniczny. W tej strefie wynik odległości zależy od rozdzielczości siatki, solver NR zaś iteruje do dokładnej równowagi; solver NR jest arbitrem końcowym.

Inżynierijnie, gdy $\eta \approx 1$, nie należy polegać wyłącznie na automatycznej klasyfikacji. Właściwą reakcją jest obliczenie NR lub modyfikacja przekroju w celu uzyskania wyraźnego zapasu (η poniżej 1).

Moduł odległości jest **15 razy szybszy** od solvera NR (faza zapytań). Obie metody są natychmiastowe dla typowych zadań; przewaga staje się istotna przy pętach optymalizacyjnych i badaniach parametrycznych, gdzie miliony kombinacji oceniane są wielokrotnie.

Wnioski

Moduł odległości zapewnia szybką metodę sprawdzania dowolnej liczby kombinacji względem powierzchni interakcji przekroju żelbetowego. Dla każdego obciążenia zwraca η i status Wewn./Zewn., dając inżynierowi natychmiastowy obraz kombinacji krytycznych we wszystkich stanach granicznych.

Weryfikacja na 100 000 obciążeń potwierdza 99,97% zgodność z solverem NR. 26 rozbieżności leży w odległości 0,2% od granicy, gdzie dyskretyzacja siatki czyni klasyfikację niepewną; solver NR pozostaje arbitrem. Dla obciążeń wyraźnie wewnątrz lub na zewnątrz obie metody są w pełni zgodne.

Obie metody są natychmiastowe w rutynowej pracy. Podejście odległościowe zyskuje przewagę przy milionach kombinacji (optymalizacja, badania parametryczne, sprawdzanie norm), gdzie wielokrotne użycie powierzchni eliminuje redundantne obliczenia.

Kluczową zaletą jest trójwymiarowy wykres rozrzutu: wszystkie kombinacje obciążeń, stany graniczne i obszar nośności widoczne na jednej rycinie. Inżynier identyfikuje jednym spojrzeniem obciążenia bezpieczne i przekraczające nośność; gotowa grafika do raportu obliczeniowego.

Eksport

SectionPro eksportuje wyniki w trzech formatach. Raport PDF zawiera widoki 3D powierzchni interakcji z punktami obciążeń. Dla każdego stanu granicznego identyfikowane jest obciążenie krytyczne, po którym następuje tabela wyników posortowana malejąco wg η . Eksporty do Excela i pliku tekstowego zawierają te same dane tabelaryczne.

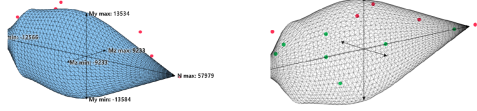
Resistance check based on distance of loads to the N-Mz-My surface

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-03-19 06:40

Rays are launched towards the loads from (N,0,0). SF represents the distance of the point relative to the boundary delimited by the surface. SF>1 indicates non-verification of the section

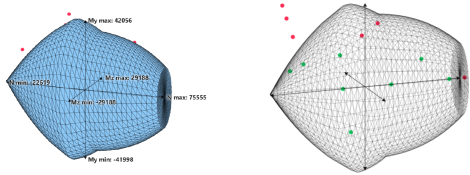
SLS : Serviceability limit state

7 loads are internal to the N-Mz-My surface. Scattered in green
 8 loads are external to the N-Mz-My surface. Scattered in red
 0 loads are on the boundary of the N-Mz-My surface. Scattered in blue



ULS : Ultimate limit state

8 loads are internal to the N-Mz-My surface. Scattered in green
 7 loads are external to the N-Mz-My surface. Scattered in red
 0 loads are on the boundary of the N-Mz-My surface. Scattered in blue



Distances of loads to surface

Load case 23 is the most unfavorable (Fs = 1.68817, External)

Load	Limit state	N (kN)	Mz (kN-m)	My (kN-m)	SF	Status
23	SLS	0.0	10000.0	15000.0	1.688	External
8	ULS	0.0	32000.0	45000.0	1.646	External
26	SLS	35000.0	7500.0	11000.0	1.487	External

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

7	ULS	0.0	27000.0	39000.0	1.475	External
22	SLS	0.0	8500.0	12500.0	1.469	External
11	ULS	45000.0	22000.0	33000.0	1.350	External
13	ULS	-20000.0	15000.0	20000.0	1.331	External
28	SLS	-11000.0	5000.0	7500.0	1.310	External
6	ULS	0.0	20000.0	30000.0	1.229	External
21	SLS	0.0	6500.0	9500.0	1.184	External
29	SLS	45000.0	3000.0	4500.0	1.095	External
10	ULS	35000.0	18000.0	28000.0	1.081	External
25	SLS	28000.0	6000.0	9000.0	1.079	External
19	SLS	60000.0	0.0	0.0	1.068	External
4	ULS	78000.0	0.0	0.0	1.067	External
15	ULS	10000.0	-15000.0	-25000.0	0.967	Internal
12	ULS	-8000.0	8000.0	12000.0	0.964	Internal
27	SLS	-4000.0	2500.0	3500.0	0.942	Internal
30	SLS	8000.0	-5000.0	-8000.0	0.920	Internal
20	SLS	0.0	4000.0	5000.0	0.899	Internal
5	ULS	0.0	10000.0	15000.0	0.898	Internal
18	SLS	53000.0	0.0	0.0	0.868	Internal
3	ULS	70000.0	0.0	0.0	0.847	Internal
14	ULS	60000.0	8000.0	12000.0	0.710	Internal
9	ULS	20000.0	12000.0	18000.0	0.682	Internal
24	SLS	15000.0	4000.0	6000.0	0.652	Internal
1	ULS	15000.0	0.0	0.0	0.397	Internal
16	SLS	10000.0	0.0	0.0	0.369	Internal
17	SLS	30000.0	0.0	0.0	0.216	Internal
2	ULS	40000.0	0.0	0.0	0.022	Internal

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

Rysunek 11: Eksport PDF, strona 1: widoki 3D i rozrzut obciążeń.

Rysunek 12: Eksport PDF, strona 2: tabela wyników.