

# Tragfähigkeitsnachweis auf Basis von Interaktionsflächen

SectionPro Tutorial: Batch-Nachweis von Lastfällen gegenüber dem räumlichen Tragfähigkeitsbereich

BridgeKernel · 2026

## Einleitung

Im vorherigen Artikel wurde die Interaktionsfläche berechnet, der räumliche Tragfähigkeitsbereich eines Stahlbetonquerschnitts im  $(N, M_z, M_y)$ -Raum. Das NR-Lösungsverfahren (Article #2) kann einzelne Lasten nachweisen, doch der Ingenieur muss die Ergebnisse einzeln prüfen oder sich auf den ungünstigsten Fall beschränken, ohne ein Gesamtbild aller Kombinationen zu erhalten.

Das Distanzmodul projiziert jeden Lastpunkt auf die Interaktionsfläche und stellt das Ergebnis als räumliches Streudiagramm dar. Für jede Last liefert es einen Status (innen, außen oder an der Grenze) und einen Ausnutzungsgrad  $\eta$ . Der Ingenieur sieht alle Kombinationen auf einen Blick: welche Lasten sicher sind, welche die Tragfähigkeit überschreiten und um wie viel.

Ein weiterer Vorteil betrifft Normen mit äquivalentem Rechteck-Druckblock (ACI 318 Whitney-Block, CSA A23.3, AASHTO). Das NR-Lösungsverfahren muss das realistische Werkstoffgesetz (Parabel-Rechteck) verwenden, da ein Druckblock kein iteratives Verfahren antreiben kann. Die Interaktionsfläche hingegen wird direkt aus dem Whitney-Block aufgebaut, was den Distanzansatz diesen Normen näher bringt.

Der Kompromiss: Das Distanzmodul liefert weder Verformungszustand noch Spannungsverteilung. Es beantwortet „bestanden oder nicht, und um wie viel?“, nicht „wie hoch ist die Spannung je Faser?“.

## Berechnete Ergebnisse

SectionPro liefert für jede Distanzanalyse drei Ergebniskategorien:

### Status & Ausnutzungsgrad

$\eta$ : normierte Distanz  
Status: Intern Extern  
Maßgebende Last identifiziert  
Eine Fläche je Grenzzustand

### 3D-Visualisierung

Interaktionsfläche (trianguliertes Netz)  
Lastpunkte als Streudiagramm  
Farblich nach Status kodiert  
Drehen, Zoomen, Verschieben

### Exporte

PDF: 3D-Ansichten + Ergebnistabelle  
XLS: Lasten, Distanzen, Status  
TXT: tabellarische Ergebnisse (Spalten)

## Dieser Ansatz vs. die Spannungs-Dehnungs-Analyse

Die folgende Tabelle vergleicht die beiden in SectionPro verfügbaren Nachweisverfahren.

| Kriterium          | Distanzen (dieser Artikel)               | Spann.-Deh. (Art. #2)                        |
|--------------------|--|--|
| Ziel               | Schnelle Vorbemessung                    | Detaillierter Zustand                        |
| Ausgabe            | $\eta$ + Status                          | $\sigma$ , $\varepsilon$ , FS, Schnittgrößen |
| Verformungszustand | Nein                                     | Ja   |
| Grafische Ausgabe  | 3D-Streudiagramm                         | Sp./Dehn.-Diagramme                          |
| Geeignet für       | Große Lastkollektive                     | Maßgebende Lastfälle                         |
| Whitney-Block      | Empfohlen                                | Realistisches Gesetz                         |
| Wenige Lasten      | Flächenaufwand                           | Schnell (direktes Lösen)                     |
| Viele Lasten       | Schnell (eine Fläche, günstige Strahlen) | Langsam (iterativ/Last)                      |

Beide Ansätze ergänzen sich: (1) Distanzen zum Screening des Lastkollektivs und zur Identifikation der maßgebenden Kombinationen, dann (2) NR-Lösungsverfahren für diese kritischen Fälle zur vollständigen Querschnittsantwort.

## Funktionsweise der Distanzberechnung

Gegeben Lastpunkt  $P = (N, M_z, M_y)$  und Interaktionsfläche  $\mathcal{S}$  berechnet das Modul den Schwerpunkt  $O$  des Flächennetzes (garantiert innerhalb des Tragfähigkeitsbereichs) und verfolgt einen Strahl von  $O$  durch  $P$  bis zum Schnittpunkt  $Q$  mit  $\mathcal{S}$ . Der Ausnutzungsgrad ist:

$$\eta = \frac{\|\overline{OP}\|}{\|\overline{OQ}\|}$$

Die Interpretation:

- $\eta < 1$ : Der Lastpunkt liegt **innerhalb** der Fläche; Querschnitt hat Tragreserve.
- $\eta = 1$ : Der Lastpunkt liegt **an der Grenze** der Querschnitt ist an seiner Grenze.
- $\eta > 1$ : Der Lastpunkt liegt **außerhalb** der Fläche; die Tragfähigkeit ist überschritten.

Im Streudiagramm sind Lastpunkte farblich kodiert: **grün** für innere ( $\eta < 1$ ), **rot** für äußere Lasten ( $\eta > 1$ ).

Die Fläche wird einmal je Grenzzustand berechnet; jeder Lastpunkt erfordert danach nur eine Strahl-Schnittberechnung — vernachlässigbarer Aufwand gegenüber der iterativen NR-Konvergenz.



| Last | $N$ (kN) | $M_z$ (kN·m) | $M_y$ (kN·m) | $\eta$ (-) | Status |
|------|----------|--------------|--------------|------------|--------|
| 8    | 0        | 14 000       | 35 000       | 1.879      | Extern |
| 7    | 0        | 11 000       | 30 000       | 1.605      | Extern |
| 4    | 72 000   | 0            | 0            | 1.030      | Extern |
| 5    | 0        | 5 000        | 10 000       | 0.916      | Intern |
| 3    | 60 000   | 0            | 0            | 0.761      | Intern |
| 2    | 30 000   | 0            | 0            | 0.088      | Intern |

Last #4 ( $N = 72000$  kN, reiner Druck) überschreitet die Fläche mit  $r_{\text{norm}} = 1.030$ , was den Grenzwert  $N_{\text{max}} = 70669$  kN aus Article #4 bestätigt. Last #2 ( $N = 30000$  kN) liegt tief im Tragfähigkeitsbereich ( $r_{\text{norm}} = 0.088$ ), wie für eine Last weit unterhalb von  $N_{\text{max}}$  erwartet.

Die kombinierten Lasten zeigen die nicht-kubische Flächenform: Last #8 ( $M_z = 14000$ ,  $M_y = 35000$ ) liegt komponentenweise unter den Quader-Grenzwerten ( $M_{z,\text{max}} = 12154$ ,  $M_{y,\text{max}} = 32317$ ), doch ihre Kombination schiebt den Punkt außerhalb ( $r_{\text{norm}} = 1.879$ ).

## SLS-C (Charakteristisch)

15 Lastkombinationen: 6 innen, 9 außen.

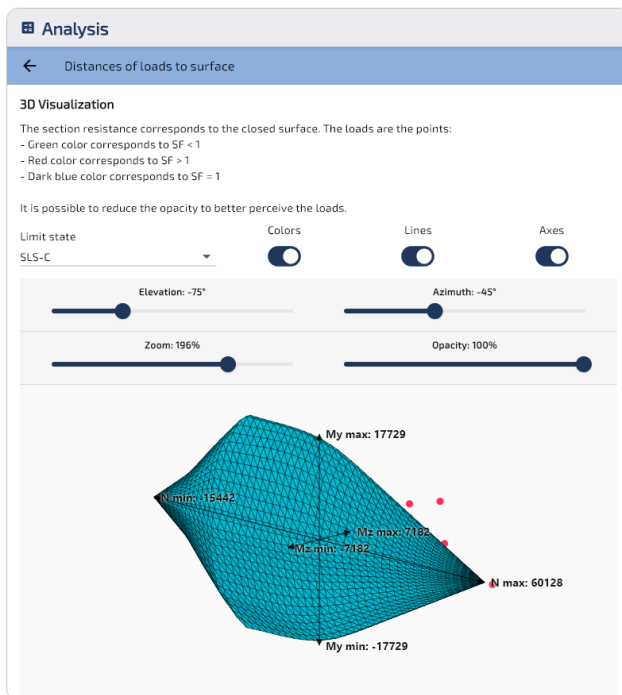


Abbildung 4: SLS-C: Lastpunkte auf der Fläche (Ansicht 1).

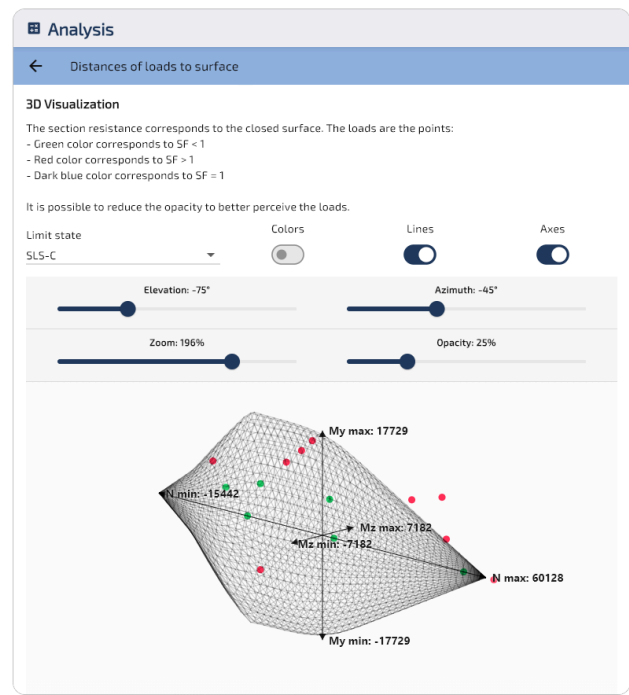


Abbildung 5: SLS-C: Lastpunkte auf der Fläche (Ansicht 2).

| Last | $N$ (kN) | $M_z$ (kN·m) | $M_y$ (kN·m) | $\eta$ (-) | Status |
|------|----------|--------------|--------------|------------|--------|
| 23   | 0        | 8 000        | 20 000       | 1.910      | Extern |
| 26   | 35 000   | 6 000        | 15 000       | 1.795      | Extern |
| 19   | 62 000   | 0            | 0            | 1.050      | Extern |
| 27   | -5 000   | 2 000        | 5 000        | 0.990      | Intern |
| 18   | 55 000   | 0            | 0            | 0.866      | Intern |
| 17   | 25 000   | 0            | 0            | 0.081      | Intern |

*Hinweis: Zur besseren Sichtbarkeit verdeckter innerer Lastpunkte: Flächenopazität reduzieren oder Drahtgittermodus wählen (beide Optionen im 3D-Viewer).*

## Elliptischer Querschnitt (ACI 318)

### Eingangsdaten

Querschnittsgeometrie, Bewehrung und Werkstoffgesetze sind identisch mit Article #4. Es werden 30 Lastkombinationen definiert: 15 für ULS und 15 für SLS.

#### Beton

- Elliptischer Querschnitt
- Breite = 3.00 m, Höhe = 2.00 m

#### Bewehrung

- 40 Stäbe entlang des Umfangs
- Durchmesser  $\varphi = 40$  mm, Betondeckung 50 mm

#### Werkstoffgesetze (ACI 318)

- Beton:  $f'_c = 30$  MPa
- Stahl:  $f_y = 500$  MPa

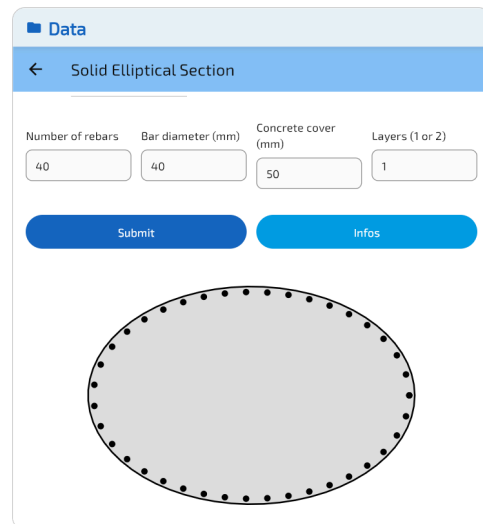


Abbildung 6: Elliptischer Querschnitt: Geometrie und Bewehrung.

## ULS

15 Lastkombinationen: 8 innen, 7 außen.

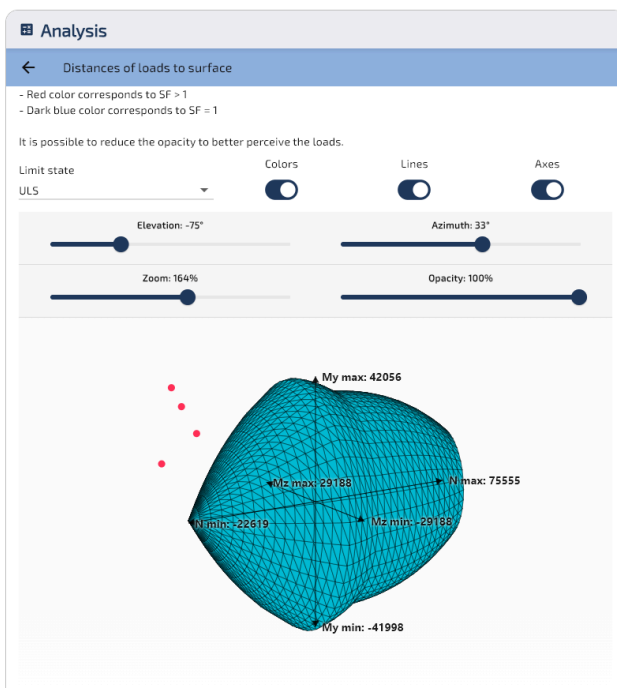


Abbildung 7: ULS: Lastpunkte auf der Fläche (Ansicht 1).

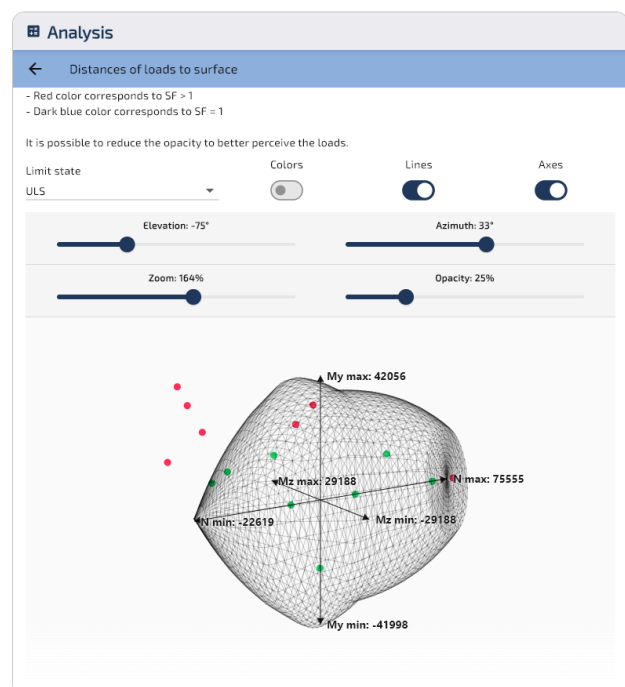


Abbildung 8: ULS: Lastpunkte auf der Fläche (Ansicht 2).

| Last | $N$ (kN) | $M_z$ (kN·m) | $M_y$ (kN·m) | $\eta$ (-) | Status |
|------|----------|--------------|--------------|------------|--------|
| 8    | 0        | 32 000       | 45 000       | 1.646      | Extern |
| 7    | 0        | 27 000       | 39 000       | 1.475      | Extern |
| 4    | 78 000   | 0            | 0            | 1.067      | Extern |
| 15   | 10 000   | -15 000      | -25 000      | 0.967      | Intern |
| 3    | 70 000   | 0            | 0            | 0.847      | Intern |
| 2    | 40 000   | 0            | 0            | 0.022      | Intern |

Die ACI  $\varphi$ -Faktoren ( $\varphi = 0.65$  bis  $0.90$ ) und die Begrenzung  $\varphi_N = 0.80$  reduzieren die Nennkapazität, wodurch die ULS-Fläche kleiner wird. Der Begrenzungsquader aus Article #4 gibt  $N_{\max} = 75555$  kN,  $M_{z,\max} = 29188$  kN·m,  $M_{y,\max} = 42056$  kN·m: das Überschreiten eines Grenzwerts garantiert Versagen, wie bei Lasten #4 und #8. Last #7 ( $M_z = 27000$ ,  $M_y = 39000$  kN·m) bleibt innerhalb aller drei Grenzwerte und fällt dennoch außerhalb der Fläche ( $\eta = 1.475$ ); der Begrenzungsquader erkennt diesen Fall nicht, die 3D-Fläche schon.

## SLS

15 Lastkombinationen: 7 innen, 8 außen.

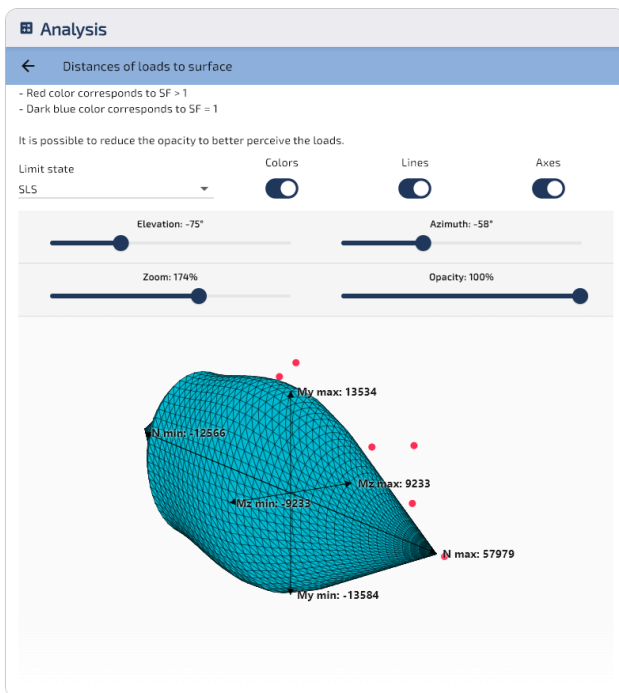


Abbildung 9: SLS: Lastpunkte auf der Fläche (Ansicht 1).

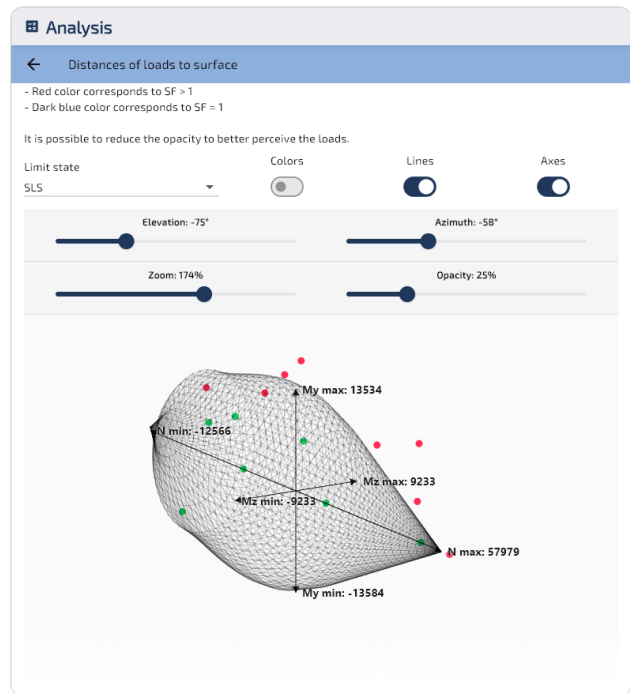


Abbildung 10: SLS: Lastpunkte auf der Fläche (Ansicht 2).

| Last | $N$ (kN) | $M_z$ (kN·m) | $M_y$ (kN·m) | $\eta$ (-) | Status |
|------|----------|--------------|--------------|------------|--------|
| 23   | 0        | 10 000       | 15 000       | 1.688      | Extern |
| 26   | 35 000   | 7 500        | 11 000       | 1.487      | Extern |
| 19   | 60 000   | 0            | 0            | 1.068      | Extern |
| 27   | -4 000   | 2 500        | 3 500        | 0.942      | Intern |
| 18   | 53 000   | 0            | 0            | 0.868      | Intern |
| 17   | 30 000   | 0            | 0            | 0.216      | Intern |

Im SLS ist der Beton auf die zulässige Spannung ( $\sigma_c = 11.5$  MPa) begrenzt, was zu einer deutlich kleineren Fläche führt. Last #23 ist die maßgebende Last beider Grenzzustände ( $r_{\text{norm}} = 1.688$ ): die kombinierte zweiachsige Biegung ( $M_z = 10000$ ,  $M_y = 15000$  kN·m) überschreitet die SLS-Tragfähigkeit, obwohl jede Komponente einzeln innerhalb des Begrenzungsquaders läge.

## Kreuzvalidierung mit dem Spannungs-Dehnungs-Lösungsverfahren

Das Distanzmodul projiziert Lastpunkte auf ein vorgefertigtes Flächennetz. Das NR-Lösungsverfahren (Newton-Raphson, Article #2) iteriert für jede Last einzeln zum Gleichgewichts-Dehnungszustand. Beide Verfahren sollten übereinstimmen: Eine Last innerhalb der Fläche ( $\eta < 1$ ) muss alle Werkstoff-Dehnungsgrenzen einhalten, eine Last außerhalb ( $\eta > 1$ ) mindestens eine verletzen.

### Vergleich bei 15 Lasten (achteckiger Querschnitt, ULS-F)

Für jede Last enthält die Tabelle das Distanzergebnis ( $\eta$ , Status Intern/Extern) sowie die ungünstigste Betondehnung  $\varepsilon_c$  und Stahldehnung  $\varepsilon_s$  aus dem Spannungs-Dehnungs-Lösungsverfahren (beide in %, Absolutwerte) mit Werkstoff-Urteil.

| Last | $N$ (kN) | $M_z$ (kN·m) | $M_y$ (kN·m) | $\eta$ (-) | Status | $\varepsilon_c$ (%) | $\varepsilon_s$ (%) | Ergebnis |
|------|----------|--------------|--------------|------------|--------|---------------------|---------------------|----------|
| 1    | 10 000   | 0            | 0            | 0.390      | Intern | 0.17                | 0.17                | OK       |
| 2    | 30 000   | 0            | 0            | 0.072      | Intern | 0.54                | 0.54                | OK       |
| 3    | 60 000   | 0            | 0            | 0.757      | Intern | 1.36                | 1.36                | OK       |
| 4    | 72 000   | 0            | 0            | 1.031      | Extern | 2.17                | 2.17                | KO       |
| 5    | 0        | 5 000        | 10 000       | 0.920      | Intern | 1.50                | 3.13                | OK       |
| 6    | 0        | 8 000        | 20 000       | 1.224      | Extern | 18.0                | 73.6                | KO       |
| 7    | 0        | 11 000       | 30 000       | 1.584      | Extern | 26.2                | 112                 | KO       |
| 8    | 0        | 14 000       | 35 000       | 1.864      | Extern | 33.3                | 140                 | KO       |
| 9    | 20 000   | 5 000        | 15 000       | 0.691      | Intern | 1.66                | 1.58                | OK       |
| 10   | 35 000   | 8 000        | 22 000       | 1.108      | Extern | 4.65                | 4.43                | KO       |
| 11   | 40 000   | 10 000       | 25 000       | 1.365      | Extern | 6.93                | 6.59                | KO       |
| 12   | -5 000   | 3 000        | 8 000        | 0.912      | Intern | 0.86                | 2.89                | OK       |
| 13   | -15 000  | 5 000        | 12 000       | 1.260      | Extern | 11.5                | 97.9                | KO       |
| 14   | 50 000   | 4 000        | 10 000       | 0.847      | Intern | 2.22                | 2.15                | OK       |
| 15   | 25 000   | -6 000       | -18 000      | 0.813      | Intern | 2.19                | 2.09                | OK       |

Beide Verfahren stimmen vollständig überein. Jede **Extern**-Last wird durch Versagen mindestens eines Werkstoffs bestätigt, jede **Intern**-Last hält alle Dehnungsgrenzen ein. Der Ausnutzungsgrad ist ein zuverlässiger Indikator: Lasten tief in der Fläche weisen Dehnungen weit unter den Grenzen auf, Grenzlasten nähern sich ihnen an, und weit außen liegende Lasten überschreiten sie deutlich. Lasten 10–11: nur Betonversagen. Lasten 6–8 und 13: beide Grenzen gleichzeitig überschritten.

*Hinweis: Das NR-Verfahren (Article #2) extrapoliert Werkstoffgesetze über ihren gültigen Bereich hinaus, wenn kein Gleichgewicht erreichbar ist. Dehnungen für Extern-Lasten sind numerische Artefakte ohne physikalische Bedeutung: Sie bestätigen lediglich, dass kein gültiger Gleichgewichtszustand existiert.*

## Benchmark mit 100 000 Lasten

Beide Verfahren werden auf 100 000 zufällige Kombinationen angewendet ( $N \in [-20\,000, 80\,000]$  kN,  $M_z, M_y \in [-50\,000, 50\,000]$  kN · m, ULS-F). Die Fläche wird einmal erstellt (31 ms) und für alle Abfragen wiederverwendet.

| Verfahren                | Lasten  | Abfragezeit | Rate     | Intern | Extern |
|--------------------------|---------|-------------|----------|--------|--------|
| Distanzen (nur Abfragen) | 100 000 | 13 ms       | 7.5 M/s  | 5.1%   | 94.9%  |
| Spannungs-Dehnung NR     | 100 000 | 207 ms      | 0.48 M/s | 5.1%   | 94.9%  |

Übereinstimmung: **99,97 %** (99 974 von 100 000 Lasten identisch klassifiziert). Die 26 Abweichungen haben alle  $|\eta - 1| < 0.002$ : Lastpunkte innerhalb von 0,2 % der Flächengrenze — nach jedem Maßstab **an der Grenze**.

Dies ist erwartetes Verhalten. Das Distanzmodul wendet keinen strengen Gleichheitstest  $\eta = 1$  an: Jede Last mit  $\eta$  hinreichend nah an 1 wird als Grenzfall behandelt. In diesem schmalen Bereich können beide Verfahren legitim abweichen; das Distanzerggebnis hängt von der Netz-Auflösung ab (endliche Dreiecksgröße = geometrische Näherung), während das NR-Verfahren auf exaktes Gleichgewicht iteriert. In solchen Fällen ist das NR-Verfahren der finale Schiedsrichter.

Aus ingenieurmäßiger Sicht sollte bei  $\eta \approx 1$  nicht allein auf die automatische Intern/Extern-Klassifizierung vertraut werden. Empfohlen: vollständige NR-Berechnung für ein genaues Ergebnis oder — besser — Anpassung von Geometrie bzw. Bewehrung, um einen klaren Sicherheitsabstand ( $\eta$  deutlich unter 1) zu erzielen.

Das Distanzmodul ist **15-mal schneller** als das NR-Verfahren (Abfragephase). In der Praxis sind beide Verfahren für den Großteil der Ingenieuraufgaben praktisch sofort verfügbar. Der Geschwindigkeitsvorteil wird entscheidend für erweiterte Anwendungen (Optimierungsschleifen, Parameterstudien, automatisierte Normennachweise über große Lastkollektive), bei denen Millionen von Kombinationen wiederholt ausgewertet werden müssen.

## Fazit

Das Distanzmodul bietet ein schnelles, zuverlässiges Verfahren zur Tauglichkeitsprüfung beliebig vieler Lastkombinationen gegenüber der Interaktionsfläche. Für jede Last liefert es  $\eta$  und Intern/Extern-Status; der Ingenieur sieht alle Grenzzustände auf einen Blick.

Die Kreuzvalidierung bestätigt 99,97 % Übereinstimmung mit dem NR-Lösungsverfahren bei 100 000 Lasten. Die 26 Abweichungen liegen alle innerhalb von 0,2 % der Flächengrenze, wo die Netz-Diskretisierung die Klassifizierung unsicher macht; das NR-Verfahren bleibt der finale Schiedsrichter. Für Lasten klar innerhalb oder außerhalb der Fläche stimmen beide Verfahren vollständig überein.

Beide Verfahren sind für die Ingenieurpraxis sofort verfügbar. Der Distanzansatz ist besonders wertvoll bei Millionen von Kombinationen (Optimierungsschleifen, Parameterstudien, Normennachweise), da die Flächenwiederverwendung redundante Berechnungen eliminiert.

Das räumliche Streudiagramm zeigt alle Lastkombinationen, alle Grenzzustände und den gesamten Tragfähigkeitsbereich in einer einzigen Abbildung, direkt in einen Berechnungsbericht integrierbar.

# Export

SectionPro exportiert die Distanzergebnisse in drei Formaten. Der PDF-Bericht enthält räumliche Ansichten der Interaktionsfläche mit Lastpunkten als Streudiagramm, je Grenzzustand die maßgebende Last sowie eine nach absteigendem  $\eta$  sortierte Ergebnistabelle. Excel- und Textexport liefern dieselben Daten für externe Nachverarbeitung.

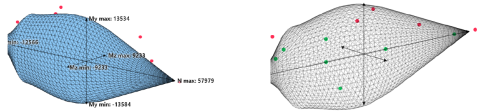
## Resistance check based on distance of loads to the N-Mz-My surface

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE ON : 2026-03-19 06:40

Rays are launched towards the loads from (N,0,0). SF represents the distance of the point relative to the boundary delimited by the surface. SF>1 indicates non-verification of the section

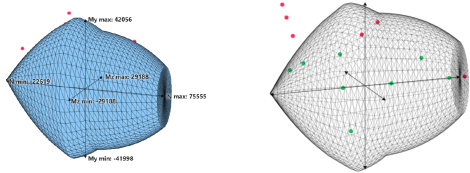
### SLS : Serviceability limit state

7 loads are internal to the N-Mz-My surface. Scattered in green  
 8 loads are external to the N-Mz-My surface. Scattered in red  
 0 loads are on the boundary of the N-Mz-My surface. Scattered in blue



### ULS : Ultimate limit state

8 loads are internal to the N-Mz-My surface. Scattered in green  
 7 loads are external to the N-Mz-My surface. Scattered in red  
 0 loads are on the boundary of the N-Mz-My surface. Scattered in blue



### Distances of loads to surface

Load case 23 is the most unfavorable (Fs = 1.68817, External)

| Load | Limit state | N (kN)  | Mz (kN-m) | My (kN-m) | SF    | Status   |
|------|-------------|---------|-----------|-----------|-------|----------|
| 23   | SLS         | 0.0     | 10000.0   | 15000.0   | 1.688 | External |
| 8    | ULS         | 0.0     | 32000.0   | 45000.0   | 1.646 | External |
| 26   | SLS         | 35000.0 | 7500.0    | 11000.0   | 1.487 | External |

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

|    |     |          |          |          |       |          |
|----|-----|----------|----------|----------|-------|----------|
| 7  | ULS | 0.0      | 27000.0  | 39000.0  | 1.475 | External |
| 22 | SLS | 0.0      | 8500.0   | 12500.0  | 1.469 | External |
| 11 | ULS | 45000.0  | 22000.0  | 33000.0  | 1.350 | External |
| 13 | ULS | -20000.0 | 15000.0  | 20000.0  | 1.331 | External |
| 28 | SLS | -11000.0 | 5000.0   | 7500.0   | 1.310 | External |
| 6  | ULS | 0.0      | 20000.0  | 30000.0  | 1.229 | External |
| 21 | SLS | 0.0      | 6500.0   | 9500.0   | 1.184 | External |
| 29 | SLS | 45000.0  | 3000.0   | 4500.0   | 1.095 | External |
| 10 | ULS | 35000.0  | 18000.0  | 28000.0  | 1.081 | External |
| 25 | SLS | 28000.0  | 6000.0   | 9000.0   | 1.079 | External |
| 19 | SLS | 60000.0  | 0.0      | 0.0      | 1.068 | External |
| 4  | ULS | 78000.0  | 0.0      | 0.0      | 1.067 | External |
| 15 | ULS | 10000.0  | -15000.0 | -25000.0 | 0.967 | Internal |
| 12 | ULS | -8000.0  | 8000.0   | 12000.0  | 0.964 | Internal |
| 27 | SLS | -4000.0  | 2500.0   | 3500.0   | 0.942 | Internal |
| 30 | SLS | 8000.0   | -5000.0  | -8000.0  | 0.920 | Internal |
| 20 | SLS | 0.0      | 4000.0   | 5000.0   | 0.899 | Internal |
| 5  | ULS | 0.0      | 10000.0  | 15000.0  | 0.898 | Internal |
| 18 | SLS | 53000.0  | 0.0      | 0.0      | 0.868 | Internal |
| 3  | ULS | 70000.0  | 0.0      | 0.0      | 0.847 | Internal |
| 14 | ULS | 60000.0  | 8000.0   | 12000.0  | 0.710 | Internal |
| 9  | ULS | 20000.0  | 12000.0  | 18000.0  | 0.682 | Internal |
| 24 | SLS | 15000.0  | 4000.0   | 6000.0   | 0.652 | Internal |
| 1  | ULS | 15000.0  | 0.0      | 0.0      | 0.397 | Internal |
| 16 | SLS | 10000.0  | 0.0      | 0.0      | 0.369 | Internal |
| 17 | SLS | 30000.0  | 0.0      | 0.0      | 0.216 | Internal |
| 2  | ULS | 40000.0  | 0.0      | 0.0      | 0.022 | Internal |

GENERATED BY THE SECTIONPRO SOFTWARE

Abbildung 11: PDF-Export, Seite 1: räumliche Ansichten und Laststreuung.

Abbildung 12: PDF-Export, Seite 2: Ergebnistabelle.